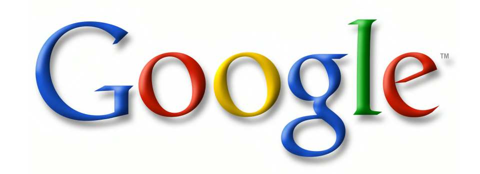
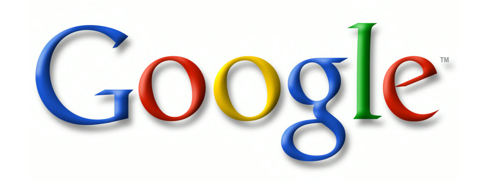








THÉORIE

NOUVELLE

GÉOMÉTRIQUE ET MÉCANIQUE

DES

LIGNES A DOUBLE COURBURE.

DES MÉTHODES EN GÉOMÉTRIE,

PAR PAUL SERRET,

In-8° avec figures dans le texte, 1855. — Prix : 6 fr.

PREMIÈRE PARTIE. *Géométrie des figures finies.* — Chapitre I. Analyse de différentes méthodes...; Application de ces méthodes à divers problèmes et théorèmes. — Chapitre II. Principes de la transformation par rayons vecteurs réciproques, et application de ces principes à la Trigonométrie sphérique.

DEUXIÈME PARTIE. *Géométrie infinitésimale.* — Six chapitres renfermant l'histoire et la solution géométrique du problème des tangentes, — des enveloppes, — des maxima et minima ordinaires, — des maxima et minima dont la détermination analytique dépend du calcul des variations (chapitres I, II, IV et V) ; — la détermination du cercle osculateur dans les courbes algébriques — et la méthode par décomposition en éléments correspondants (chapitres III et VI).

Les problèmes qui servent d'application aux méthodes ont été choisis, en général, parmi ceux auxquels se rattache un certain intérêt historique.

Paris — Imprimerie de MALLET-BACHELIER, rue du Jardinet, 12.

THÉORIE

NOUVELLE

GÉOMÉTRIQUE ET MÉCANIQUE

DES

LIGNES A DOUBLE COURBURE,

PAR PAUL SERRET,

DOCTEUR ÈS SCIENCES, MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE.

Gardons-nous de croire qu'une science soit faite quand on l'a réduite à des formules analytiques. Rien ne nous dispense d'étudier les choses en elles-mêmes, et de nous bien rendre compte des idées qui font l'objet de nos spéculations... Que si le calcul seul peut quelquefois nous offrir une vérité nouvelle, il ne faut pas croire que, sur ce point même, l'esprit n'ait plus rien à faire : mais, au contraire, il faut songer que, cette vérité étant indépendante des méthodes ou des artifices qui ont pu nous y conduire, il existe certainement quelque démonstration simple qui pourrait la porter à l'évidence ; ce qui doit être le grand objet et le dernier résultat de la science mathématique.

(POINSOT, *Théorie nouvelle de la Rotation des Corps*, p. 80.)

PARIS,

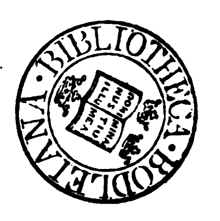
MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE IMPÉRIAL DE PARIS,

Quai des Augustins, 55.

—

1860


BIBLIOTHECA BODLEIANA

PRÉFACE.

La théorie des lignes à double courbure, telle qu'elle résulte aujourd'hui des travaux déjà anciens de Monge, et de ceux plus récents de plusieurs géomètres contemporains, comprend deux études distinctes.

La première, qui constitue en quelque sorte l'anatomie de ces lignes, a pour objet la recherche des propriétés que présente *en chacun de ses points* une ligne à double courbure quelconque, et pour résultat de nombreuses formules exprimant les diverses relations de grandeur et de position qui existent entre les éléments correspondants de la ligne considérée, du lieu des centres de courbure, de la ligne de striction de la surface gauche des normales et de l'arête de rebroussement de la surface polaire.

Dans la seconde, on considère *dans toute leur étendue* la ligne à double courbure primitive et chacune des lignes qui en dérivent; les développées de cette ligne; les surfaces, gauches ou développables, formées par les normales principales, par les droites polaires ou rectifiantes, etc. A cette seconde étude enfin se rattache essentiellement la recherche des lignes à double courbure qui, considérées dans toute leur étendue, présentent en chacun de leurs points une même propriété; le résultat de cette recherche étant la définition géométrique de chacune de ces lignes d'après cette propriété. On voit que ce dernier problème,

qui a pour objet, pour ainsi dire, de reconstruire d'une seule pièce une ligne à double courbure d'après les caractères qu'elle présente en l'un de ses points, est l'inverse du premier, qui a dû le précéder, et qui devrait lui fournir les éléments de cette reconstruction. Il présente aussi de bien plus grandes difficultés, et n'a été abordé que beaucoup plus tard, et dans ces dernières années, par un petit nombre de géomètres, parmi lesquels nous citerons M. Puiseux, qui a fixé le premier la nature des lignes dont les deux courbures sont constantes; M. A. Serret, qui a résolu par une méthode analytique très-élégante plusieurs des questions que nous aurons à étudier géométriquement; et M. Bertrand, à qui l'on doit plusieurs propositions importantes conduisant à la classification des surfaces gauches engendrées par les normales principales d'une ligne à double courbure.

La première Partie de ce livre a pour objet l'exposition de la théorie, ainsi définie, des lignes à double courbure.

La marche que nous avons suivie est entièrement géométrique, et n'exige aucun emprunt à l'analyse, ou à la théorie des surfaces, si ce n'est dans quelques définitions ou dans un petit nombre de propositions universellement connues. On ne retrouvera donc dans nos calculs aucune des formules qui figurent habituellement dans la théorie analytique des lignes à double courbure ; les coordonnées rectilignes ordinaires se trouveront elles-mêmes éliminées, parce que nous aurons toujours rencontré, ou cru rencontrer, en dehors de ces coordonnées traditionnelles, les variables convenant le mieux aux questions que nous avions à étudier.

On pourrait s'attendre, il est vrai, et d'après cette seule déclaration, à trouver seulement dans cet ouvrage une suite de propositions, reliées entre elles, sans doute, par

l'unité du sujet, mais indépendantes les unes des autres au point de vue de la démonstration.

Car c'est là le caractère ordinaire de la Géométrie : elle offre rarement ces grandes voies, largement ouvertes, élégamment symétriques, familières à l'Analyse, et sur lesquelles des travailleurs de génie ont coulé un macadam éternel. Ses grandes routes, à elle, sont des sentiers perdus à travers une forêt épaisse : on y marche dans l'ombre, attentif à saisir un premier rayon; mais un reflet quelquefois y paraît un rayon; un rayon, une lueur vaine. Le sentier cependant s'élargit peu à peu; le sol résonne mieux sous les pas raffermis; des clartés naissantes descendent lentement des cimes qui paraissaient tout à l'heure ne recéler que la nuit, et l'œil insensiblement s'accoutume à la lumière. Le monde nouveau, qui est au bout de ce voyage de découvertes, aura d'ailleurs des dimensions diverses; le plus souvent une île, et quelquefois un continent; au gré de Dieu : puisque la loi de nos pensées nous échappe, et que notre esprit est en nous comme un instrument que sa main a réglé d'avance, que nous dérangeons volontairement quelquefois, mais dont nous ignorons également le mécanisme actuel et les expansions futures.

Cependant, et malgré cette variété de points de vue inhérente à toute exploration géométrique de quelque étendue, nous espérons que l'on trouvera dans celle-ci des conditions d'uniformité suffisantes, et presque comparables à celles que pourrait offrir l'analyse. La méthode qui nous a permis d'atteindre à ce degré d'uniformité est contenue dans cette observation évidente : *Les relations qui existent entre les éléments d'une figure tracée d'une manière quelconque dans l'espace peuvent se séparer en deux classes ; la première renfermant les relations* descrip-

tives; *la seconde, les relations* métriques : *et la détermination des relations de grandeur découle avec facilité de la détermination des relations de position*. Or, c'est cette première partie du problème, consistant dans la recherche des relations de position le plus immédiatement utiles, que nous croyons avoir résolu d'une manière uniforme, par l'introduction de certaines lignes sphériques auxiliaires, que nous nommons *indicatrices*, et qui interviennent à peu près sans interruption dans toute la première partie de cet ouvrage.

Dans la seconde et dernière Partie, les lignes à double courbure sont considérées comme représentant, sur une surface déterminée, la trajectoire d'un point matériel en mouvement, ou la figure d'un fil en équilibre. On reconnaîtra aisément que le fond et la forme en sont également nouveaux; et l'on pourra trouver au commencement des chapitres X et XI l'indication des résultats obtenus, que nous omettons ici.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES LIGNES A DOUBLE COURBURE.

CHAPITRE I.

PROPOSITIONS PRÉLIMINAIRES.

CHAPITRE II.

DES PROPRIÉTÉS DESCRIPTIVES COMMUNES A TOUTES LES LIGNES A DOUBLE COURBURE.

CHAPITRE III.

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE INFINITÉSIMALE.

CHAPITRE IV.

DE L'INDICATRICE SPHÉRIQUE.

CHAPITRE V.

DE DIVERS ÉLÉMENTS DIFFÉRENTIELS ET DE DIVERSES GRANDEURS QUE L'ON PEUT AVOIR A CONSIDÉRER EN CHAQUE POINT D'UNE LIGNE A DOUBLE COURBURE QUELCONQUE; FORMULES DIVERSES.

CHAPITRE VI.

THÉORÈMES.

CHAPITRE VII.

DES LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE DE RÉVOLUTION. SECTIONS PLANES; LIGNES ET CERCLES GÉODÉSIQUES; LOXODROMIES ET LIGNES D'OMBRE.

CHAPITRE VIII.

DES LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE DÉVELOPPABLE.

CHAPITRE IX.

DES LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE GAUCHE.

SECONDE PARTIE.

THÉORIE MÉCANIQUE DES LIGNES A DOUBLE COURBURE.

CHAPITRE X.

DES LIGNES A DOUBLE COURBURE CONSIDÉRÉES COMME TRAJECTOIRES D'UN POINT MATÉRIEL EN MOUVEMENT SUR UNE SURFACE.

CHAPITRE XI.

DES LIGNES A DOUBLE COURBURE CONSIDÉRÉES COMME FIGURES D'ÉQUILIBRE D'UN FIL QUI REPOSE SUR UNE SURFACE.

NOTES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

Page 26. Le théorème contenu sous le n° 3 a été donné, sous une autre forme, par M. Steiner.

Page 36, ligne 5, en remontant, *au lieu de* l'équation (6), *lisez* l'équation (5).

Page 71, ligne 2, en remontant, *au lieu de* qui est la polaire de, *lisez* qui est la polaire relative de.

Page 83, ligne 5, *au lieu de* $\rho_{ss'}$, *lisez* $\rho_{cc'}$.

Page 102, ligne 1, *au lieu de* des arcs correspondants, *lisez* des arcs élémentaires correspondants.

Page 105, ligne 7, en remontant, *au lieu de* une hélice dont les, *lisez* une hélice tracée sur un cylindre dont les.

Page 107, ligne 7, *au lieu de* le point *c* décrit, *lisez* le point C décrit.

Page 109, lignes 1 et 2, *et elles sont les lignes asymptotiques de la surface;* addition inutile et inexacte.

Page 111. La méthode suivie dans le n° 2 a été employée déjà par M. Bertrand.

Page 168, ligne 1, en remontant, *au lieu de* $= \frac{k.\omega'}{2r'}$, *lisez* $\frac{k.\omega'.r'}{2}$.

Page 170. La *Remarque I* contient, *dans quelques exemplaires,* une formule inexacte, qui a été supprimée dans les autres.

Page 189, ligne 8, *au lieu de* dans le plan, *lisez* suivant la transformée plane de la trajectoire primitive.

Page 192, ligne 12, *au lieu de* V et V + V, *lisez* V et V + *d*V.

Page 193, ligne 10, *au lieu de* dans le plan, *lisez* suivant la transformée plane de la trajectoire primitive.

THÉORIE

NOUVELLE

GÉOMÉTRIQUE ET MÉCANIQUE

DES

LIGNES A DOUBLE COURBURE.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES LIGNES A DOUBLE COURBURE.

HISTORIQUE.

I.

1. Le problème de la duplication du cube et celui des deux moyennes proportionnelles, qui exercèrent une si heureuse influence sur les progrès de la géométrie naissante, présentent aussi le premier exemple de l'apparition des lignes à double courbure dans les spéculations géométriques. On connaît les nombreuses et inutiles tentatives qui furent faites d'abord pour résoudre ces problèmes *par la ligne droite et le cercle;* et les diverses solutions *mécaniques* qui leur succédèrent, exigeant toutes, ou l'emploi d'un instrument spécial, ou l'usage d'une courbe auxiliaire, construite par points. C'était sans doute après avoir acquis la conviction de l'impossibilité d'une solution *géométrique,* que les anciens, aussi sévères dans leurs constructions que dans leurs raisonnements, s'étaient enfin rejetés

sur les solutions mécaniques, ou même purement spéculatives, de ces problèmes. Parmi ces dernières, celle que nous allons rapporter d'après Architas, philosophe pythagoricien, qui eut la gloire de compter Platon parmi ses disciples, nous paraît offrir, quoique très-ingénieuse et très-simple, l'expression la plus élevée du découragement où en étaient arrivés les géomètres; et du sentiment, général sans doute dès cette époque, de l'inutilité des efforts que l'on pourrait tenter encore pour parvenir à une véritable solution.

Traçons sur un plan deux demi-conférences égales et ayant un point commun o. $\overline{oy}$ étant la corde que le diamètre $\overline{oa'}$ de la seconde détermine dans la première, soient $\overline{ox}$ la corde de la seconde circonférence ayant $\overline{oy}$ pour projection et $\overline{ox'}$ la projection de $\overline{oy}$ sur le diamètre $\overline{oa}$ de la première. Si l'on pose

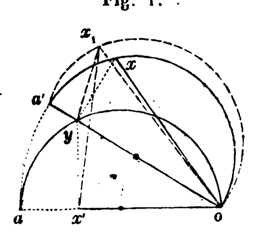
$$\overline{oa} = \overline{oa'} = a, \quad \overline{ox} = x, \quad \overline{oy} = y,$$

on aura

$$x^2 = a.y, \quad y^2 = a.\overline{ox'}.$$

Si donc on savait donner à la seconde circonférence, relativement à la première, une position telle, que le rapport de $\overline{ox'}$ à $\overline{ox}$ fût égal à celui de b à a, b désignant une seconde ligne donnée (que l'on peut supposer inférieure à a), les équations précédentes se changeraient en celle-ci :

Fig. 1.



$$x^2 = a.y, \quad y^2 = b.x;$$

et $x = \overline{ox}$, $y = \overline{oy}$ seraient les deux moyennes proportionnelles cherchées entre les lignes a et b.

Or si l'on regarde comme fixe la circonférence oa, et que l'on fasse tourner la seconde autour de $\overline{oa'}$ de manière à l'amener dans un plan *vertical* perpendiculaire au plan *horizontal* de la circonférence fixe, $\overline{yx}$ venant en $\overline{yx_1}$, et $\overline{ox}$ en $\overline{ox_1}$; on

voit, en joignant $\overline{x_1 x'}$, que cette droite est perpendiculaire à $\overline{ox'}$, et que le rapport $\frac{ox'}{ox_1} = \frac{b}{a}$ étant donné, l'angle $x_1 ox'$ ou $x_1 oa$ est donné. Par suite, dans l'espace, *le point cherché* x_1 *appartient à la surface d'un cône de révolution ayant pour axe la droite* oa. Mais ce point appartient aussi *à la ligne à double courbure qui est la commune intersection du cylindre droit, ayant pour base la circonférence* oya, *et du tore engendré par la circonférence* ox_1a' *se mouvant autour de la verticale du point* o. Ainsi le point cherché x_1 est l'intersection d'une ligne à double courbure et d'un cône; et l'une des moyennes proportionnelles cherchées, la droite ox_1, se trouve ainsi *virtuellement* déterminée.

2. Les Collections mathématiques de Pappus font aussi mention de quelques lignes à double courbure connues des anciens, et dont ce géomètre découvrit certaines propriétés curieuses. La première est la *spirale hémisphérique,* représentée en coordonnées géographiques par l'équation

$$\lambda = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} L.$$

Pappus établit, à l'aide des méthodes d'Archimède, que *l'aire sphérique comprise entre la spirale et la base de l'hémisphère est équivalente au carré construit sur le diamètre.* C'est ce que l'on vérifie aisément par les méthodes modernes, en prenant, pour élément de l'aire à évaluer, la superficie comprise entre la spirale, deux méridiens consécutifs et l'équateur, superficie assimilable à une portion de zone, et ayant, par suite, pour mesure

$$d\sigma = R^2 \sin\lambda . dL = R^2 \cos\frac{1}{4} L . dL;$$

d'où, pour la surface entière,

$$\sigma = 4R^2 \left(\sin\frac{1}{4} L\right)_0^{2\pi} = 4R^2.$$

La seconde des lignes à double courbure étudiées par Pappus

est celle qui résulte de l'intersection d'un hélicoïde gauche à plan directeur et d'un cône de révolution ayant même axe que l'hélicoïde. L'axe commun des deux surfaces étant supposé vertical, Pappus démontre que *la projection horizontale de la courbe d'intersection est une spirale d'Archimède*, ce qui fournit une génération de cette dernière courbe par *les lieux à la surface*. Depuis, M. Chasles, développant cette proposition, a fait voir (*Aperçu historique*, Note VIII) que l'on peut obtenir *toutes* les spirales en projetant l'intersection de l'hélicoïde gauche et d'une seconde surface convenablement choisie, de révolution autour de l'axe de l'hélicoïde, sur un plan perpendiculaire à cet axe; et ce n'est pas là seulement la solution d'un problème d'analyse déterminée, mais un mode précieux de transformation, à l'aide duquel on peut constater des dépendances géométriques remarquables entre des courbes diverses.

3. Les lignes à double courbure dont nous venons de parler paraissent être les seules qui aient été connues des anciens. Il faut néanmoins ajouter à cette nomenclature l'hélice tracée sur un cylindre de révolution, dont deux arcs quelconques peuvent se superposer partiellement, observation attribuée à Géminus; et les lignes résultant de l'intersection mutuelle de certaines surfaces que le géomètre Philon de Tyane nommait *plectoïdes*, et que M. Chasles croit avoir été des surfaces réglées (*Aperçu historique*, chap. Ier, § 25).

II.

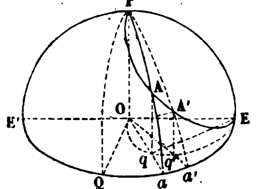
4. La *loxodromie sphérique*, c'est-à-dire la ligne coupant sous un angle constant les divers méridiens d'une sphère, est une des premières lignes à double courbure étudiées avec une certaine suite par les modernes. Cette étude, commencée par le géomètre portugais Nonius, fut continuée par Halley, Leibnitz, Hermann et Murdoch. On doit à Halley cette observation intéressante que *la projection stéréographique d'une loxodromie est une spirale logarithmique*; ce qui résulte d'ailleurs du *principe de la conservation des angles*, déjà

connu de Ptolémée. Nous verrons plus loin que ces deux courbes, qui ont la même définition, l'une sur la sphère, l'autre sur le plan, présentent encore cette analogie que *le centre de courbure sphérique de la première s'obtient par une construction identique à celle qui, sur le plan, donne le centre de courbure de la spirale logarithmique.*

5. Roberval, dans son *Traité des Indivisibles* (*Divers Mémoires de Mathématiques et de Physique*, p. 213), et Viviani, dans le problème de la voûte carrable, trouvèrent des propriétés différentes de la ligne qui résulte de l'intersection d'une sphère et d'un cylindre de révolution, ayant un rayon de la sphère pour diamètre de sa base.

Si l'on regarde d'abord, avec Viviani, cette ligne comme tracée sur la sphère, elle y a pour équation

Fig. 2.



$$\lambda = L,$$

et *l'aire sphérique comprise entre l'un des quadrants de la courbe, le méridien tangent au cylindre et l'équateur, est mesurée par le carré du rayon de la sphère.*

Si l'on regarde ensuite cette ligne comme tracée sur le cylindre, et que l'on veuille, avec Roberval, évaluer l'aire cylindrique comprise entre l'un de ses quadrants et la base du cylindre, on voit que l'élément $AA'q'q$ de cette aire a pour mesure

$$\overline{Aq}.\widehat{qq'} = R\sin\lambda\left(\frac{R}{2}\cdot 2\,dL\right) = R^2\sin\lambda.dL = R^2\sin L.dL\,;$$

et l'on en conclut que *l'aire cylindrique considérée, étant encore mesurée par le carré du rayon, est équivalente à l'aire sphérique évaluée précédemment.*

Enfin, suivant une remarque de Bossut, *le volume compris entre les deux aires sphérique et cylindrique, le plan de la base et le plan du méridien tangent au cylindre, a pour mesure les $\frac{2}{9}$ du cube du rayon.*

Montucla (*Histoire des Mathématiques*, tome III, page 101) ajoute au problème résolu par Roberval cette observation que *l'aire cylindrique comprise entre la base du cylindre et la sphère est encore exactement carrable dans le cas, plus général, où la base du cylindre est simplement tangente au grand cercle qui limite inférieurement la sphère.*

6. Enfin, si nous citons encore la théorie des épicycloïdes sphériques étudiées successivement par Hermann, Jean Bernoulli, Nicole et Clairaut (*Mémoires de l'Académie,* 1732); l'équation des lignes géodésiques des surfaces de révolution, obtenue par Jacques Bernoulli et Clairaut (*Acta Lipsiæ,* 1698, page 227, et *Mémoires de l'Académie*, 1733); la description des lignes résultant de la pénétration mutuelle d'une sphère, d'un cône ou d'un cylindre, et leur construction à l'aide d'ordonnées menées par les différents points d'un axe curviligne (Frezier, *Traité de Stéréotomie,* 1732); nous aurons à peu près épuisé la nomenclature des recherches de détail, peu nombreuses comme on le voit, qui ont précédé l'étude systématique des lignes à double courbure : Étude commencée avec quelque généralité par Clairaut, mais qui, en réalité, doit exclusivement ses bases actuelles aux travaux de Monge, — qui découvrit tout ce qui se rapporte à la première courbure, aux développées, aux droites polaires, à la surface formée par l'ensemble de ces droites et à la sphère osculatrice; — de Tinseau et de Lancret, auxquels on doit les importantes notions du plan osculateur et de la seconde courbure.

CHAPITRE PREMIER.

PROPOSITIONS PRÉLIMINAIRES.

7. *De deux cas particuliers dans lesquels il existe une relation simple entre la première courbure d'une ligne et celle de sa projection orthogonale.*

On sait que dans un triangle quelconque le rayon du cercle

circonscrit est égal au produit des trois côtés divisé par le quadruple de la surface du triangle. Il en résulte, en désignant par R et R′ les rayons des cercles circonscrits à un triangle ABC et à sa projection A′B′C′, que l'on a

$$R = \frac{a.b.c}{4S}, \quad R' = \frac{a'.b'.c'}{4S'};$$

d'où

$$\frac{R'}{R} = \frac{a'}{a} \cdot \frac{b'}{b} \cdot \frac{c'}{c} : \frac{S'}{S}.$$

Cela posé, supposons, *en premier lieu*, que les sommets A, B, C soient trois points infiniment voisins d'une hélice cylindrique; A′, B′, C′ étant leurs projections sur le plan de la section droite du cylindre. Si l'on désigne par α l'inclinaison *constante* des tangentes de l'hélice sur les génératrices correspondantes du cylindre, les rapports $\frac{a'}{a}$, $\frac{b'}{b}$, $\frac{c'}{c}$ auront pour limite commune $\sin\alpha$. On voit aisément d'ailleurs (par la considération d'un cône droit auxiliaire dont les génératrices seraient parallèles aux tangentes de l'hélice) que le plan osculateur de l'hélice (limite du plan ABC) fait avec le plan de la base du cylindre un angle égal à $\frac{\pi}{2} - \alpha$; et, par suite, que la limite du rapport $\frac{S'}{S}$ est encore $\sin\alpha$. On a donc, en concevant que les points B et C, B′ et C′ se rapprochent indéfiniment des points A et A′, et en passant à la limite,

$$(1) \qquad \rho' = \rho.\sin^2\alpha,$$

pour la relation existant entre les rayons de courbure ρ et ρ' de l'hélice et de la section droite du cylindre, en des points correspondants de ces lignes.

L'angle α étant constant, ρ et ρ' sont l'un et l'autre constants, ou l'un et l'autre variables; donc *si le rayon de première courbure d'une hélice cylindrique est constant, cette hélice appartient à un cylindre de révolution.*

Supposons, *en second lieu*, que le plan de projection ait été

choisi parallèle à la tangente en A de la courbe ABC et faisant un angle α avec le plan osculateur de cette courbe au même point : $\cos\alpha$ sera, dans ce cas, la limite du rapport $\frac{S'}{S}$, les rapports $\frac{a'}{a}$, $\frac{b'}{b}$, $\frac{c'}{c}$ auront pour limite commune l'unité ; et l'on aura, entre les rayons de courbure en A et A′ de la ligne ABC et de sa projection, la relation

$$\text{(II)} \qquad \rho' = \frac{\rho}{\cos\alpha}.$$

Si l'angle α du plan de projection et du plan osculateur en A tend vers zéro, le rayon de courbure ρ' de la projection tend à devenir égal au rayon de courbure ρ de la ligne projetée ; et si cet angle tend vers $\frac{\pi}{2}$, le rayon de courbure ρ' de la projection augmente indéfiniment. Donc *si l'on projette une courbe sur un plan mené suivant sa tangente en* A, *perpendiculairement au plan osculateur correspondant, la projection présente un point d'inflexion en* A.

Observation. Les relations (I) et (II), que nous avons dû établir directement, sont des conséquences immédiates des théorèmes d'Euler et de Meunier, appliqués à une surface cylindrique.

8. *De la courbure géodésique d'une ligne tracée sur une surface : théorèmes.* Une ligne AA′ étant tracée sur une surface, si par deux de ses points infiniment voisins, A et A′, on mène deux lignes géodésiques de la surface tangentes à cette ligne ; leur angle, que nous désignerons par E_g, est appelé *angle de contingence géodésique* de l'arc AA′ ; et la limite du rapport de l'arc AA′ à l'angle correspondant, quand l'arc AA′ tend vers zéro, est *le rayon de courbure géodésique* au point A de la ligne considérée : nous le désignerons par R_g.

Théorème I. *Le rayon de courbure géodésique en un point quelconque d'une ligne tracée sur une surface, est égal au rayon de première courbure* R_1 *de cette ligne au même point,*

divisé par le cosinus de l'angle du plan osculateur de la ligne et du plan tangent à la surface en ce point :

(III) $$R_g = \frac{R_1}{\cos\alpha}.$$

Démonstration. Soient I le point d'intersection des lignes géodésiques tangentes en A, A' à la courbe considérée; Ia, Ia' les tangentes à ces lignes, faisant entre elles un angle aigu égal à E_g ; et IN la normale à la surface au point I : IN sera une normale principale commune aux deux lignes géodésiques IA, IA', et le plan tangent en I à la surface sera perpendiculaire au plan osculateur en I de chacune de ces lignes. Si l'on projette, sur le plan tangent en I, le triangle curviligne AA'I, la projection sera un triangle curviligne aa'I; et les tangentes en a, a' du côté $\widehat{aa'}$, ou les tangentes aux mêmes points des lignes $\widehat{a\mathrm{I}}$, $\widehat{a'\mathrm{I}}$, feront, avec les tangentes en I des mêmes lignes, des angles mesurés par des infiniment petits du *second ordre :* puisque, d'après la fin du numéro précédent, les projections des lignes IA, IA' sur le plan tangent en I présentent une inflexion en ce point. Il résulte de là que l'angle de contingence, e, relatif à l'arc aa' de la projection aa', peut être remplacé par l'angle des tangentes en I des lignes $\widehat{\mathrm{I}a}$, $\widehat{\mathrm{I}a'}$ ou par l'angle E_g des lignes IA, IA' elles-mêmes; et le rayon de courbure r_1 de la ligne aa', égal à $\frac{aa'}{e}$, ou à $\frac{AA'}{E_g}$, est égal à R_g :

Fig. 3.

$$r_1 = R_g.$$

D'ailleurs la formule (II) du numéro précédent étant évidemment applicable à la ligne AA' et à sa projection aa', on a

$$r_1 = \frac{R_1}{\cos\alpha};$$

et la comparaison de ces deux formules démontre le théorème énoncé.

Théorème II. *Le rayon de courbure géodésique en un point quelconque* A *d'une ligne* AA′ *tracée sur une surface, est égal au rayon de courbure au point correspondant de la ligne plane que l'on obtient en circonscrivant à la proposée, suivant la ligne* AA′, *une surface développable, et développant cette dernière sur un plan en même temps que la ligne* AA′ *qu'elle contient.*

Nous renvoyons au chapitre VIII la démonstration de cette proposition, que nous n'aurons pas à employer jusque-là.

Observation. L'importance de la considération du rapport $\frac{R_1}{\cos\alpha}$ dans l'étude des lignes tracées sur une surface, a été signalée pour la première fois par M. O. Bonnet, dans son Mémoire sur la théorie générale des surfaces (*Journal de l'École Polytechnique*, 32ᵉ cahier, 1848). Plus tard, et dans ses leçons au Collége de France, M. Liouville a donné à ce rapport une signification géométrique nouvelle, par l'introduction de la notion de l'angle de contingence géodésique.

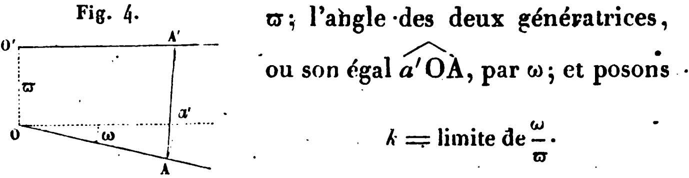
9. *Théorème relatif à la distribution des plans tangents à une surface gauche, le long d'une même génératrice de la surface.*

Théorème. *Un plan quelconque étant mené par une génératrice d'une surface gauche, la distance du point, suivant lequel ce plan est tangent à la surface, au point central* O *de cette génératrice, est proportionnelle à la tangente trigonométrique de l'inclinaison de ce plan sur le plan tangent au point central* (Chasles, Mémoire sur les surfaces gauches : *Correspondance Mathématique et Physique*, tome XI).

Dans cet énoncé, on appelle *point central* d'une génératrice OA, le point où la droite OO′ qui mesure la plus courte distance entre les deux génératrices infiniment voisines OA, O′A′, s'appuie sur la première; ou plutôt la position limite de ce point.

Démonstration. Soit OO′ la plus courte distance entre la génératrice fixe OA et une génératrice variable O′A′, infiniment voisine de la première : le point O sera infiniment voisin

du point central. Désignons la plus courte distance OO′ par ϖ; l'angle des deux génératrices, ou son égal $\widehat{a'OA}$, par ω; et posons



$$k = \text{limite de } \frac{\omega}{\varpi}.$$

Prenant un point déterminé A de la génératrice OA, situé à une distance R du point central, menons par ce point une droite AA′, perpendiculaire à la génératrice OA, et rencontrant la génératrice infiniment voisine O′A′. (Il suffit, pour cela, de mener Aa' perpendiculaire à OA dans le plan $a'OA$, d'élever $a'A'$ égale et parallèle à OO′ et de joindre AA′.) Les triangles rectangles $Aa'A'$, OAa' donnent les relations

$$\text{tang}\,\widehat{AA'a'}, \quad \text{ou} \quad \text{tang}\,(AA', OO') = \frac{\overline{Aa'}}{\overline{A'a'}} = \frac{\overline{Aa'}}{\varpi},$$

$$\overline{Aa'} = \omega . \overline{OA};$$

d'où, en multipliant membre à membre et réduisant,

$$\text{tang}(AA', OO') = \frac{\omega}{\varpi} . \overline{OA}.$$

Si l'on suppose maintenant que la génératrice O′A′ se rapproche indéfiniment de la génératrice fixe OA, le second membre aura pour limite $k.R$. D'ailleurs, les cordes infiniment petites OO′ et AA′ ont pour limites respectives des tangentes menées à la surface par le point central, dont le point O se rapproche indéfiniment, et par le point fixe A; et comme ces tangentes sont perpendiculaires à $\overline{OA}$, et que leur angle mesure, par suite, l'inclinaison φ des plans tangents menés à la surface par le point central et par le point A, on voit que le premier membre a pour limite tangφ, de sorte que l'on a

$$\text{(IV)} \qquad \text{tang}\,\varphi = k.R;$$

et cette formule démontre le théorème énoncé.

Observation. φ et R peuvent être regardés comme positifs dans la formule précédente, quand on l'applique à la détermi-

nation d'un plan tangent unique. Mais si l'on veut fixer, sans ambiguïté, la position du plan tangent à la surface en un second point A′ de la même génératrice, situé à une distance R′ du point central, on devra, dans la formule analogue

$$\text{tang}\varphi' = k.R',$$

regarder φ' et R' comme positifs, ou négatifs, suivant que le nouveau point de contact A′ sera situé, par rapport au point central, du même côté que le point A, ou du côté opposé. Il résultera d'ailleurs de cette convention que l'on aura toujours, en désignant par ψ l'inclinaison mutuelle des plans tangents en A et A′, $\psi = \varphi - \varphi'$, et, par suite,

$$\text{tang}\psi = \frac{k.(R - R')}{1 + k^2.RR'}.$$

On voit que si R et R′ sont de même signe, le dénominateur de la formule précédente sera toujours différent de zéro, et l'angle ψ différent d'un droit. Donc *si les plans tangents en deux points d'une même génératrice d'une surface gauche sont rectangulaires, le point central de cette génératrice est nécessairement compris entre leurs points de contact.*

CHAPITRE II.

DES PROPRIÉTÉS DESCRIPTIVES COMMUNES A TOUTES LES LIGNES A DOUBLE COURBURE.

10. La tangente en un point d'une ligne à double courbure est, ainsi que la tangente d'une ligne plane, la limite des positions occupées par une sécante tournant autour de ce point, de manière qu'un second point d'intersection de la sécante et de la courbe se rapproche indéfiniment du premier.

11. Le *plan osculateur* en un point d'une ligne à double courbure est la limite des positions occupées par un plan passant par ce point, et par deux autres points de la courbe qui

se rapprochent indéfiniment du premier. On peut encore le considérer, *soit* comme la limite des positions occupées par un plan passant par la tangente au point considéré, et par un point infiniment voisin du premier; *soit* comme la limite d'un plan variable passant par cette même tangente, et parallèle à une tangente infiniment voisine de la première : et ces trois définitions sont équivalentes.

Pour le démontrer, concevons un cylindre passant par la ligne donnée *abc*, et dont les génératrices soient parallèles à la tangente *at* de cette ligne en *a* : ce cylindre est entièrement déterminé, ainsi que son plan tangent en *a*; et nous allons voir que ce dernier représente, quelle que soit celle des trois définitions que l'on adopte, le plan osculateur de la ligne *abc* au même point. En effet,

Fig. 5.

Le plan mené, d'après la troisième définition, par la tangente *at*, et parallèlement à une tangente infiniment voisine *bt'*, est parallèle au plan tangent au cylindre en *b*, et a pour limite le plan tangent en *a*.

Le plan mené, d'après la seconde définition, par la tangente *at* et par un point infiniment voisin *b*, renferme la génératrice du cylindre pour le point *b*, et une corde infiniment petite $\overline{ba}$ d'une ligne $\widehat{cba}$ située tout entière sur le cylindre; il est donc infiniment voisin du plan tangent au cylindre en *b*, et a même limite que ce dernier, à savoir le plan tangent en *a*.

Enfin, et relativement à la première définition, si l'on considère un cylindre *variable*, passant constamment par la ligne *abc*, et dont les génératrices soient parallèles à la droite variable $\overline{ac}$, on verra que le plan variable *abc*, contenant toujours une génératrice $\overline{ca}$ et passant en outre par une corde infiniment petite $\overline{cb}$ d'une ligne située tout entière sur ce cylindre, est infiniment voisin du plan tangent à ce cylindre en *c* : la limite de ce plan variable sera donc encore le plan tangent en *a* au cylindre-limite, ou au cylindre défini précédemment.

Remarque I. Il résulte, en particulier, de cette dernière partie de la démonstration, que la position du plan-limite demeure la même quels que soient les modes de convergence des points b et c vers le point a.

Remarque II. La distance au plan osculateur en un point a *d'un second point* b *de la courbe infiniment voisin du premier, est un infiniment petit du troisième ordre.* Cette distance est, en effet, un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant pour hypoténuse la distance du même point b à la tangente at (distance du second ordre); l'angle opposé à ce côté étant infiniment petit, parce qu'il mesure l'inclinaison du plan variable tab sur le plan osculateur en a, qui en est la limite.

Remarque III. La plus courte distance entre deux tangentes infiniment voisines at *et* bt' *d'une ligne à double courbure, est un infiniment petit du troisième ordre* (Bouquet). La distance en question est, en effet, égale à la distance du point b au plan $ta\theta'$ mené par la tangente at parallèlement à la tangente bt'; et cette dernière, à son tour, est égale à la distance du même point b à la tangente at, *quantité du second ordre*, multipliée par le *sinus* de l'angle formé par le plan $ta\theta'$ avec le plan tab. Or cet angle est infiniment petit, ainsi que son *sinus*, puisque les plans variables $ta\theta'$ et tab ont la même limite, à savoir le plan osculateur en a. Donc, etc.

Remarque IV. La tangente en un point d'une ligne à double courbure est la limite de la droite d'intersection du plan osculateur en ce point, et du plan osculateur en un second point infiniment voisin du premier. Il suffit, pour le démontrer, d'imaginer un cône auxiliaire dont les génératrices soient parallèles aux tangentes de la ligne considérée : les plans tangents du cône sont, en effet, parallèles aux plans osculateurs de la ligne à double courbure; l'intersection de deux plans osculateurs infiniment voisins est parallèle à l'intersection des plans tangents correspondants, et celle-ci a pour limite une génératrice du cône; donc, etc.

12. On appelle *angle de torsion* d'un arc quelconque ab

d'une ligne à double courbure l'angle H des plans osculateurs menés à l'origine et à l'extrémité de cet arc; et *rayon de seconde courbure* R_2 de la ligne en un de ses points, la limite vers laquelle tend le rapport de l'arc élémentaire de cette ligne à l'angle de torsion correspondant, lorsque l'origine de l'arc demeurant fixe en ce point, sa longueur décroît indéfiniment. Le rapport inverse $\frac{H}{dS}$ recevant le nom de *seconde courbure*; $\frac{1}{R_2}=\frac{H}{dS}$.

Par chaque point d'une ligne à double courbure passent une infinité de normales à cette courbe, toutes situées dans le *plan normal;* celle d'entre elles qui est située dans le plan osculateur correspondant reçoit le nom de *normale principale;* les normales principales relatives aux différents points d'une ligne à double courbure engendrant une surface gauche, *la surface gauche des normales.*

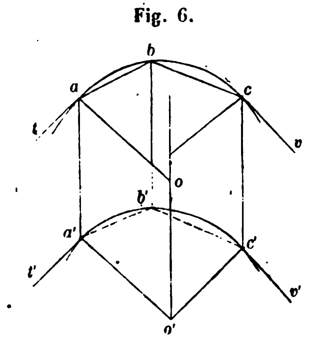
13. L'*angle de contingence* E, la *courbure totale* ou *moyenne* d'un arc fini quelconque, la courbure et le rayon de courbure (ou encore la première courbure et le rayon de première courbure) en un point déterminé, ont les mêmes définitions dans une ligne à double courbure et dans une ligne plane. On doit ajouter cependant que le cercle de courbure, dont le rayon R_1 est défini par l'équation $R_1=\frac{dS}{E}$, est, en chaque point, situé dans le plan osculateur correspondant, tangent à la courbe en ce point, et situé du même côté que celle-ci par rapport à la tangente.

14. Le *cercle osculateur* en un point d'une ligne à double courbure est la limite d'un cercle variable passant par ce point et par deux autres points de la courbe infiniment voisins du premier; on peut encore le considérer comme la limite d'un cercle variable tangent à la courbe au point considéré et passant par un second point de la courbe infiniment voisin du premier.

En chaque point d'une ligne à double courbure, le cercle osculateur et le cercle de courbure coïncident; et le centre commun de ces cercles est situé sur la droite polaire relative à ce point; cette dernière n'étant autre chose que la limite de l'intersection du plan normal au point considéré et d'un plan normal infiniment voisin. Il suffira d'ailleurs, pour la démonstration, d'établir que le rayon du cercle osculateur est égal à celui $\frac{dS}{E}$ du cercle de courbure; et que la distance du point considéré de la courbe à la droite polaire correspondante a la même valeur.

Prenant à cet effet trois points infiniment voisins a, b, c de la courbe donnée, considérons la figure composée des tangentes aux points extrêmes $\overline{at}$, $\overline{cv}$, de la droite oo' intersection des plans normaux aux mêmes points, et du système des trois points a, b, c; projetons orthogonalement toute cette figure en $t'a'b'c'v'$ sur un plan parallèle aux tangentes at, cv; et soit o' le point auquel se réduit la projection de la droite oo' : $\overline{a'o'}$ représentant la distance du point a à cette droite, et o' étant le point de rencontre des normales en a' et c' de la ligne projetée.

Fig. 6.

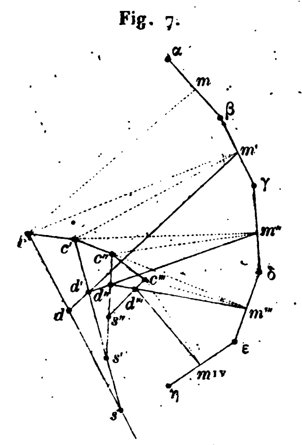


Dans la projection, et en vertu des propriétés des courbes planes, analogues à celles que nous voulons établir pour les lignes à double courbure, le rapport $\frac{dS'}{E'}$ relatif à l'arc infiniment petit $a'c'$, la distance $\overline{a'o'}$ et le rayon du cercle $a'b'c'$, ayant la même limite, sont mesurés par des nombres infiniment peu différents les uns des autres. De là, en revenant à la figure primitive, et remarquant que la différence $dS - dS'$ est du second ordre, que l'angle E est égal à l'angle E'; la distance du point a à la droite oo' égale à la droite $a'o'$, et enfin que le rayon du cercle abc diffère infiniment peu, d'après le lemme I,

(*voir* page 8), du rayon du cercle $a'b'c'$; on conclura que le rapport $\frac{dS}{E}$ relatif à l'arc infiniment petit abc de la ligne à double courbure primitive, le rayon du cercle abc, et la distance du point a à la droite intersection des plans normaux aux extrémités de cet arc, sont des quantités qui diffèrent infiniment peu les unes des autres, et que leurs limites respectives sont égales : ce qui suffit à la démonstration.

15. Considérant une ligne à double courbure quelconque, inscrivons dans cette ligne une ligne polygonale $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\ldots$ ayant ses côtés égaux, et menons, par les milieux m, m', $m''\ldots$ de ces côtés, des plans normaux à ces côtés. Ces plans se couperont deux à deux et consécutivement, suivant les droites cs, $c's'$, $c''s''$,..., qui sont respectivement perpendiculaires aux plans $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\delta$, $\gamma\delta\varepsilon\ldots$ de deux éléments consécutifs de la ligne polygonale primitive, et qui rencontrent ces plans aux points c, c', c'',..., centres respectifs des cercles $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\delta$,..., passant par trois sommets consécutifs de cette ligne: et les droites cs, $c's'$, $c''s''$,..., formeront elles-mêmes par leurs intersections successives une nouvelle ligne polygonale $ss's''\ldots$ dont les sommets s, s',..., représentent les centres des sphères $\alpha\beta\gamma\delta$, $\beta\gamma\delta\varepsilon$,..., qui passent par quatre sommets consécutifs, de la ligne primitive.

Fig. 7.



Prenant maintenant un point quelconque d sur la droite $\overline{cs}$, joignons $\overline{dm'}$ qui coupe $\overline{c's'}$ en d'; joignons ensuite $\overline{d'm''}$ qui coupe $\overline{c''s''}$ en d'', $\overline{d''m'''}$ qui coupe $\overline{c'''s'''}$ en d''', et ainsi de suite. Et soit $dd'd''\ldots$ la ligne résultante.

L'égalité hypothétique des côtés de la ligne polygonale primitive, la définition des droites $\overline{cs}$ et celle des points c entraînent successivement les égalités $\overline{cm} = \overline{cm'}$, $\overline{c'm'} = \overline{c'm''}$,...;

les égalités $\overline{d'm'} = \overline{d'm''}$, $\overline{d''m''} = \overline{d''m'''}$,..., et enfin l'égalité des inclinaisons de $\overline{d'm'}$ et $\overline{d'm''}$ sur $\overline{c'd'}$, de $\overline{d''m''}$ et $\overline{d''m'''}$ sur $c''d''$,.... Or, il résulte d'abord de ces dernières égalités, que la ligne $dd'd''$... se transforme en une *ligne droite* par le développement sur un plan de la surface polyédrale, formée par les droites $\overline{cs}$, $\overline{c's'}$,..., sur laquelle elle est tracée; et il résulte des précédentes que cette même ligne est une véritable *développée* de la ligne polygonale $mm'm''$... qui a pour sommets les milieux des éléments de la ligne primitive; car si l'on conçoit un fil partiellement enroulé sur la ligne $dd'd''d'''$, et dont la partie actuellement *libre* $d'''m'''$ atteindrait par son extrémité le point m'''; et que l'on déroule ce fil de manière que sa partie libre soit successivement dirigée suivant les prolongements des côtés $d'd''$ dd',... de la ligne $d''d'd$, l'extrémité de ce fil atteindra successivement tous les sommets m'', m', m,... de la ligne $mm'm''$.

Si donc on imagine que la longueur commune des côtés de la ligne polygonale $\alpha\beta\gamma$, inscrite dans la courbe primitive, diminue indéfiniment, et que l'on passe à la limite, on aura ce théorème: *Les droites polaires relatives aux différents points d'une ligne à double courbure quelconque sont les génératrices d'une surface développable*, *la* surface polaire; *l'arête de rebroussement de cette surface est le lieu des centres des* sphères osculatrices *de la ligne primitive; et il passe par chaque point de la surface polaire une développée de la ligne primitive, la série tout entière de ces développées formant une série de lignes géodésiques de la surface polaire.*

Remarque. Les tangentes de l'arête de rebroussement de la surface polaire étant perpendiculaires aux plans osculateurs de la ligne primitive, les plans osculateurs de la première sont aussi perpendiculaires aux tangentes de la seconde. Il en résulte que *les angles de contingence et de torsion de la ligne primitive sont respectivement égaux aux angles de torsion et de contingence de l'arête de rebroussement; le rapport de la première à la seconde courbure pour l'une de ces lignes étant*

égal à l'inverse du rapport analogue pour l'autre. (Fourier.) En outre, *les normales principales des deux lignes sont parallèles.* (Lemonnier.) Ces deux droites, en effet, sont situées dans un même plan, le plan normal de la première ligne, qui coïncide avec le plan osculateur de la seconde; et, dans ce plan, elles sont perpendiculaires à une même droite, la droite polaire de la première ligne qui coïncide avec la tangente de la seconde.

16. Revenant à la figure précédente, supposons que l'on développe sur un plan la surface polyédrale formée par les droites $\overline{cs}$, $\overline{c's'}$,...; et soient $SS'S''$, $CC'C''$... les lignes polygonales planes suivant lesquelles se transforment les lignes $ss's''$, $cc'c''$...: la ligne $dd'd''$... se transformera, dans ce développement, en une ligne droite; et tous les points m, m', m'',... de la ligne $mm'm''$ viendront se réunir en un même point O de cette droite. Or, les différents points c de la ligne cc' s'obtiennent, avant le développement, en abaissant, des points m, des perpendiculaires $\overline{mc}$ sur les éléments prolongés de la ligne ss'; et les distances $\overline{mc}$, $\overline{ms}$ sont alors infiniment peu différentes des rayons du cercle et de la sphère passant par trois ou quatre sommets consécutifs de la ligne primitive $\alpha\beta\gamma$: donc, et puisque les perpendiculaires $\overline{mc}$ et les droites $\overline{ms}$ sont toujours situées dans le plan de deux éléments consécutifs $\overline{cs}$, $\overline{c's'}$ de la ligne $ss's''$, *la ligne* $CC'C''$ *s'obtiendra, après le développement, en abaissant d'un même point* O *des perpendiculaires sur les éléments prolongés de la ligne* $SS'S''$; *et les rayons vecteurs correspondants* $\overline{OC}$ *et* $\overline{OS}$ *de ces deux lignes représenteront, à un infiniment petit près, les rayons du cercle ou de la sphère passant par trois ou quatre sommets consécutifs de la ligne primitive* $\alpha\beta\gamma$. Dès lors, si l'on conçoit que la ligne polygonale $\alpha\beta\gamma$ se rapproche indéfiniment de la ligne à double courbure considérée d'abord, on parvient à ce théorème :

Si on développe sur un plan la surface polaire relative à une ligne à double courbure quelconque, le lieu des centres

de courbure de cette ligne se transforme suivant la podaire, *relative à une certaine origine* O, *de l'arête de rebroussement développée; et les rayons menés du point origine à deux points correspondants de l'arête développée et de sa podaire, sont respectivement égaux aux rayons de la sphère osculatrice et du cercle osculateur pour le point correspondant de la ligne primitive.*

Ce théorème, dû à Lancret, et demeuré depuis inaperçu, a été établi par ce géomètre à l'aide de considérations qui ne paraissent pas complétement rigoureuses.

Remarquons, en effet, en reproduisant sa démonstration, que l'on peut construire toutes les développées de la ligne considérée, suivant la méthode connue, en prenant pour point initial, dans la description de chacune de ces lignes, chacun des points du lieu des centres de courbure. On reconnaît par là que chaque développée passe par un point de la ligne des centres, et qu'elle est en ce point perpendiculaire à la génératrice correspondante de la surface polaire; et, comme les développées sont des lignes géodésiques de cette surface, elles se transforment, par son développement, en des droites menées par les différents points de la ligne des centres développée, perpendiculairement aux tangentes correspondantes de l'arête de rebroussement développée. Or, ajoute Lancret (*Correspondance Polytechnique*, tome I, page 51), *toutes les développées ayant dans l'espace un point commun*, à savoir le point d'intersection de la ligne primitive et de la surface polaire, *leurs transformées après le développement concourent en un même point;* ce qui est le théorème énoncé.

On peut objecter à ce raisonnement qu'admettre l'existence d'un point commun aux développées et à la ligne primitive revient à supposer nul, en ce point, le rayon de courbure de cette dernière; si donc le rayon de courbure de la ligne proposée ne s'annule jamais, le point commun, sur l'existence duquel reposait le raisonnement, n'existe pas; et la démonstration paraît en défaut.

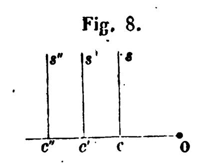
On pourrait croire cependant, et d'après notre démonstra-

tion même, que les développées ayant toujours un point commun O après le développement de la surface polaire, il en est de même avant le développement. Pous s'assurer qu'il peut en être autrement, il suffit de remarquer qu'un point quelconque, pris au hasard sur le plan où s'est effectué le développement, est réel, ou imaginaire, par rapport à la surface primitive, suivant que de ce point on peut mener une tangente à l'arête de rebroussement développée, ou que l'on ne peut en mener aucune.

Remarque I. La réciproque de la proposition précédente est vraie, quoique donnant lieu à une démonstration plus pénible; elle consiste en ce que *toute podaire de l'arête de rebroussement développée d'une surface, est la transformée du lieu des centres de courbure d'une certaine ligne de l'espace ayant, pour surface polaire, la surface développable considérée.*

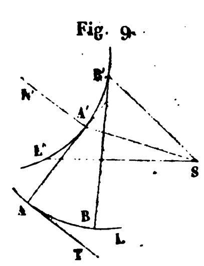
Remarque II. Les normales principales d'une ligne à double courbure ne sont pas tangentes à la ligne des centres de courbure, et celle-ci n'est une développée de la ligne primitive que dans le cas où cette dernière est plane. En effet, si les normales principales étaient tangentes à la ligne des centres, comme elles sont situées dans les plans tangents de la surface polaire, elles conserveraient la même propriété après le développement de celle-ci sur un plan. Or, c'est ce qui n'a pas lieu, en général; car on a vu que dans ce développement la ligne des centres se transforme dans la podaire, relative à une certaine origine O de l'arête de rebroussement développée; les normales principales devenant en même temps les rayons vecteurs de la podaire, par rapport à la même origine. Cette propriété *négative* cesserait cependant d'avoir lieu si la podaire devenait une ligne droite passant par l'origine : mais alors les tangentes de l'arête de rebroussement développée, ou les génératrices de la surface polaire, seraient parallèles après et aussi, par suite,

Fig. 8.



avant le développement; la surface polaire se réduirait à un cylindre, l'angle de torsion serait rigoureusement nul dans toute l'étendue de la ligne considérée, et cette ligne serait plane.

17. *Si une ligne à double courbure* L *est coupée à angles droits par les tangentes d'une ligne* L', *un arc quelconque de cette dernière est égal à la différence des tangentes menées par ses extrémités et terminées à la ligne primitive dont elle est, par suite, une développée; elle est, en outre, située tout entière sur la surface polaire relative à la ligne primitive, et ses normales principales sont parallèles aux tangentes de cette ligne.*



Démonstration. Si on développe, en effet, sur un plan, la surface développable ayant la ligne L' pour arête de rebroussement, la ligne L, qui est une trajectoire orthogonale des génératrices rectilignes de cette surface, et la ligne L', se transforment en une ligne plane l et en sa développée l'; et cette seule observation démontre la première partie de l'énoncé. En outre, chaque point de la ligne L' pouvant être considéré comme la limite du point d'intersection de deux normales infiniment voisines de la ligne primitive, appartient à l'une des droites polaires de celle-ci; et la ligne L' est dès lors située tout entière sur la surface polaire de la ligne primitive. Enfin les tangentes de cette dernière et les normales principales de la développée L' sont parallèles. Elles sont, en effet, situées deux à deux dans un même plan, — le plan tangent de la surface développable, qui coïncide avec le plan osculateur de la ligne L'; — et, dans ce plan, elles sont perpendiculaires à une même droite, — la génératrice de la surface, qui coïncide avec la tangente de la ligne L'.

COROLLAIRES. I. *Une ligne à double courbure n'admet qu'un seul système de développées, défini précédemment, et*

représenté par une série de lignes géodésiques de la surface polaire relative à cette ligne.

2. *Les développées d'une ligne* plane *forment une série de lignes géodésiques d'un cylindre ayant pour section droite la développée plane de la ligne proposée.* Évident.

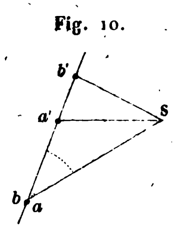
2'. *Une ligne dont l'une des développées est une hélice cylindrique est nécessairement plane.* Les tangentes de la ligne considérée sont en effet parallèles aux normales principales de la developpée; et ces dernières, dans le cas actuel, sont parallèles à un même plan. (*Voir* ci-après, chapitre VI.)

3. *Les développées d'une ligne* sphérique *forment une série de lignes géodésiques d'un cône concentrique à la sphère et ayant pour base, sur celle-ci, la développée sphérique de la ligne proposée.* (*Voir* ci-après, chapitre III.)

3'. *Si l'une des développées est une ligne géodésique d'un cône, la courbe primitive est une ligne sphérique; la sphère qui la contient est concentrique au cône; et le rayon de la sphère qui aboutit à un point quelconque de la courbe fait un angle constant avec la tangente correspondante de la développée.* (Vieille, *Compléments d'Analyse et de Mécanique*, p. 80.)

En effet, par le développement du cône sur un plan, la ligne géodésique considérée L', et toutes ses tangentes, se trouvent développées, ou rabattues, suivant une même ligne droite; en même temps, et en vertu de la première partie du théorème contenu dans le n° 17, les différents points de la ligne primitive L, situés d'abord sur les tangentes de la ligne L', viennent se rabattre sur un même point de cette droite. Or la distance de ce point unique au sommet du cône développé représente la *commune distance* du sommet du cône à tous les points de la ligne primitive L, qui appartient dès lors à une sphère concentrique au cône; et l'inclinaison de la droite qui mesure cette distance sur la droite, transformée de la ligne géodésique primitive, représente l'inclinaison constante du rayon de la sphère aboutissant à un point quelconque de

Fig. 10.



la ligne primitive sur la tangente correspondante de la développée.

3''. *Les développées d'une hélice sphérique forment une série de lignes géodésiques d'un cône de révolution.* (*Voir* ci-après, chapitre III.)

CHAPITRE III.

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE INFINITÉSIMALE.

I.

De l'arc de grand cercle tangent à une ligne sphérique.

18. Une ligne sphérique quelconque, appartenant à une sphère de rayon 1, étant représentée par une équation entre les *coordonnées polaires sphériques* ρ et ω : l'inclinaison V sur le rayon vecteur ρ de l'arc de grand cercle tangent au point correspondant de cette ligne ; la sous-tangente et la sous-normale, seront définies par les équations

$$(1) \qquad \tang V = \frac{\sin\rho}{\rho'},$$

$$(2) \qquad \tang (S.T) = \frac{\sin^2\rho}{\rho'},$$

$$(3) \qquad \tang (S.N.) = \rho' = \frac{d\rho}{d\omega}.$$

La première peut être employée dans la recherche des liaisons qui doivent exister entre deux courbes *conjuguées,* également inclinées sur chacun des rayons vecteurs issus d'une même origine. On aura, en effet, pour ces deux courbes,

$$\tang V = \pm \tang V_1, \quad \frac{\rho'}{\sin\rho} = \frac{\pm \rho'_1}{\sin\rho_1}, \quad \frac{d\rho}{\sin\rho} = \pm \frac{d\rho_1}{\sin\rho_1};$$

d'où

$$L. \tang\frac{\rho}{2} = \pm L. \tang\frac{\rho_1}{2} + L. C.,$$

ou

$$(a) \qquad \tang\frac{\rho}{2}\cdot\left(\tang\frac{\rho_1}{2}\right)^{\pm 1} = \text{constante}.$$

Les lignes sphériques ainsi conjuguées, projetées stéréographiquement sur le plan tangent mené par l'origine des rayons vecteurs, se transforment suivant deux courbes *semblables*, ou suivant deux courbes *réciproques*.

Il existe, dans le plan, entre deux courbes réciproques, une telle dépendance, que *la sous-tangente de l'une et la sous-normale de l'autre sont les facteurs d'un produit constant.* Cette propriété ne se conserve pas dans les lignes sphériques correspondantes; car on a, pour ces dernières,

$$\tang(S.T).\tang(S_1.N_1.) = \sin\rho.\sin\rho_1.$$

19. Une courbe sphérique à plusieurs foyers f_1, f_2, ..., étant représentée par l'équation différentielle

$$(4) \qquad m_1.d\rho_1 + m_2.d\rho_2 + \ldots = 0,$$

la position de l'arc de grand cercle, normal à cette courbe, et formant avec chaque rayon vecteur ρ un angle positif ou négatif représenté par V, sera déterminée par l'équation

$$(4') \qquad m_1.\sin V_1 + m_2.\sin V_2 + \ldots = 0.$$

Applications. 1. Que la courbe considérée soit une *conchoïde sphérique* ayant pour *base* une ligne quelconque, mais dont on sache construire l'arc tangent, ou l'arc normal. L'équation de cette dernière étant $\rho = \varphi(\omega)$, l'équation de la conchoïde sera

$$\rho_1 = \rho + \text{constante},$$

d'où

$$\rho'_1 = \rho'.$$

La conchoïde et la courbe qui lui sert de base ont par conséquent même sous-normale [*voir* la formule (3)]; et ce résultat renferme la construction de l'arc normal, à laquelle conduit aussi la théorie des centres instantanés de rotation.

2. Que la courbe considérée soit la *podaire pp'* d'une

ligne aa' par rapport à l'origine O. Si l'on considère la courbe $\alpha\alpha'$ supplémentaire de la ligne aa', on reconnaît aisément que la supplémentaire et la podaire sont, relativement à l'origine O, deux courbes à rayons vecteurs complémentaires. Leurs perspectives sur le plan tangent en O, le point de vue étant au centre de la sphère, sont donc par rapport à l'origine O deux lignes à rayons vecteurs réciproques; et les perpendiculaires abaissées de l'origine sur les tangentes en des points correspondants de ces lignes sont également inclinées sur le rayon vecteur commun. La même propriété subsiste donc sur la sphère, et les arcs de grand cercle $\widehat{oq}$, $\widehat{oh}$, abaissés de l'origine perpendiculairement sur les arcs tangents en p et en α aux lignes pp' et $\alpha\alpha'$, sont également inclinés sur le rayon vecteur comme $\widehat{po\alpha}$. Mais le dernier de ces arcs perpendiculaires est le prolongement de l'arc $\widehat{oa}$: donc, *sur la sphère, comme dans le plan, le rayon vecteur de la première podaire* pp' *divise en parties égales l'angle formé par les rayons vecteurs de la ligne primitive* aa' *et de la seconde podaire* qq'. Si la ligne primitive se réduit à un point, la podaire est l'ellipse sphérique décrite par le sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle, construit sur une hypoténuse fixe.

Fig. 11.

3. L'arc normal à la courbe à plusieurs foyers représentée par l'équation

$$(c) \qquad m_1 \cos \rho_1 + m_2 \cos \rho_2 + \ldots = \text{constante},$$

ou

$$m_1 \sin \rho_1 . d\rho_1 + m_2 \sin \rho_2 . d\rho_2 + \ldots = 0;$$

dans laquelle m_1, m_2, ... désignent des nombres *constants*, est défini par la formule (4),

$$m_1 \sin \rho_1 . \sin V_1 + m_2 \sin \rho_2 . \sin V_2 + \ldots = 0,$$

ou

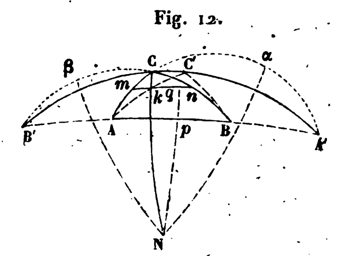
$$(c') \qquad m_1 . \sin p_1 + m_2 . \sin p_2 + \ldots = 0;$$

$p_1, p_2, \ldots$ désignant les arcs, perpendiculaires à l'arc normal, menés par les foyers $f_1, f_2, \ldots$; et $\sin p_1$, $\sin p_2, \ldots$ les distances, positives ou négatives, des mêmes foyers au plan de l'arc normal. L'équation (c') exprime donc que le plan de l'arc normal passe par le centre de gravité G des masses m_1, $m_2, \ldots$ placées respectivement aux foyers f_1, $f_2, \ldots$; ou que l'arc normal lui-même passe par un point *fixe* g, extrémité du rayon $\overline{cGg}$: et *la courbe représentée par l'équation* (c) *est un petit cercle de la sphère*, ce qui est peut-être un théorème nouveau.

Remarque. On peut parvenir directement à ce dernier résultat, en remarquant que le premier membre de l'équation (c) représente le moment, par rapport au plan du grand cercle ayant pour pôle un point quelconque de la courbe considérée, d'une masse $\mu = m_1 + m_2 + \ldots$ placée au centre de gravité G des masses m_1, $m_2, \ldots$ distribuées aux divers foyers f_1, $f_2, \ldots$: la distance du centre de gravité à ce plan est donc constante; ce plan roule sur un cône de révolution autour de l'axe cG; le grand cercle qu'il détermine sur la sphère a pour enveloppe le petit cercle qui sert de base à ce cône; et la courbe primitive enfin, ayant pour supplémentaire un petit cercle, est elle-même un petit cercle.

4. Proposons-nous enfin, comme dernière application, de construire l'arc normal à la courbe CC′ décrite par le sommet libre d'un triangle ABC, d'aire constante, construit sur une base fixe AB. C, C′ étant deux points infiniment voisins de la courbe considérée, les triangles infinitésimaux ACC′, BCC′ sont équivalents, et l'on a

Fig. 12.



$$(1 - \cos AC)\, d\alpha = (1 - \cos BC)\, d\beta.$$

On trouve d'ailleurs, dans chacun de ces triangles,

$$\sin AC . d\alpha = CC' . \cos ACN, \quad \sin BC . d\beta = CC' . \cos BCN,$$

$\widehat{CN}$ étant l'arc normal ; et $d\alpha$, $d\beta$ désignant les angles infiniment petits CAC', CBC' : et l'on déduit de la combinaison de toutes ces relations

$$\frac{1-\cos AC}{\sin AC}\cos ACN = \frac{1-\cos BC}{\sin BC}\cos BCN,$$

ou

$$(d) \qquad \tang\frac{AC}{2}\cdot\cos ACN = \tang\frac{BC}{2}\cos BCN.$$

Or, si l'on prolonge les arcs AC, BC jusqu'aux points A', B' diamétralement opposés à A et à B, et si on désigne par α et β les points milieux des arcs CA', CB' ; l'équation précédente pourra être remplacée par celle-ci :

$$(d') \qquad \frac{\cos\alpha CN}{\tang\alpha C} = \frac{\cos\beta CN}{\tang\beta C},$$

qui exprime que l'arc normal CN passe par le point de concours des arcs menés par α et β perpendiculairement aux arcs CA', CB' ; ou par le pôle du petit cercle de la sphère déterminé par les deux points fixes A', B' et par le point C. Et il résulte de là, non-seulement la solution du problème proposé, mais encore la détermination de la nature de la courbe considérée, ou la démonstration du théorème de Lexell. On voit, en effet, que la courbe considérée et le cercle A'B'C sont tangents l'un à l'autre en C : cette courbe ne peut donc être qu'un cercle déterminé passant par les points A' et B', ou l'enveloppe d'une suite de cercles passant par ces mêmes points ; mais cette dernière hypothèse est inadmissible, puisque l'enveloppe se réduirait aux deux points directeurs A' et B' ; donc, etc.

Remarque I. L'équation (d) exprime encore que *l'arc normal en* c *est perpendiculaire à l'arc de grand cercle* mn *qui joint les milieux des côtés* AC *et* BC : d'où cette construction donnée par Gudermann (*Grundriss der Analytischen Sphärik*, p. 147) du pôle N du petit cercle : *Mener l'arc de grand cercle perpendiculaire sur le milieu* p *de la base donnée* AB ; *et prendre sur cet arc, à partir de son point de rencontre* q *avec l'arc* mn, *une longueur* qN *égale à un quadrant.*

Remarque II. L'interprétation précédente de l'équation (d) conduit encore à une *première* définition *des polygones d'aire maximum inscrits dans une courbe donnée*, à savoir que *l'arc normal à la courbe circonscrite en chacun des sommets du polygone maximum doit être perpendiculaire à l'arc de grand cercle joignant les milieux des côtés adjacents*. Il en résulte, en particularisant la courbe donnée, que *de tous les polygones sphériques, d'un même nombre de côtés, inscrits dans un petit cercle, le polygone régulier est maximum d'aire*. Si la courbe donnée est une ellipse sphérique, la *dernière* définition du polygone maximum inscrit paraît offrir une tout autre difficulté, même dans le cas le plus simple où le polygone se réduit à un triangle. (*Voir* Steiner, *Journal de Mathématiques*, 1841, page 170.)

II.

Cercle de courbure, cercle osculateur et développée d'une ligne sphérique quelconque.

20. Propositions préliminaires. — Lemme I. *Deux petits cercles de la sphère étant tangents intérieurement en un point, la différence de leurs ordonnées curvilignes correspondantes, terminées au grand cercle tangent au point commun, est un infiniment petit du second ordre, ou du troisième (l'abscisse commune étant du premier), suivant que la différence des rayons des deux cercles est finie ou infiniment petite.*

Démonstration. L'abscisse commune étant du premier ordre, l'ordonnée de chaque cercle est du second, et il en est de même de la différence des ordonnées, si la différence des rayons est finie. D'un autre côté si, l'abscisse commune demeurant fixe, la différence des rayons décroît indéfiniment, la nouvelle différence des ordonnées décroîtra de même indéfiniment; et son rapport à la différence primitive, déjà du second ordre, tendra vers zéro : ce qui veut dire que cette nouvelle différence est du troisième ordre.

Lemme II. *Étant donné un arc infiniment petit* aMb

d'une courbe sphérique quelconque, il existe toujours entre les extrémités de cet arc un point M *tel, que l'arc de grand cercle normal à la courbe en ce point soit perpendiculaire à l'arc de grand cercle* ab *qui réunit ses extrémités. En outre, la distance de ce point* M *à l'arc* ab *est du second ordre; et le grand cercle joignant le point* M *au milieu de la* corde $\widehat{ab}$ *fait avec l'arc normal en* M *un angle nul, ou fini, mais toujours différent d'un droit.*

Démonstration. Abaissons d'un point m de l'arc considéré $am\text{M}b$ un arc de grand cercle perpendiculaire sur la corde $\widehat{ab}$, et menons par ce même point un arc de grand cercle tangent à la courbe en ce point, et dirigé dans le sens $\widehat{ab}$. La longueur du segment intercepté par ces deux arcs sur la corde $\widehat{ab}$ est très-voisine d'une demi-circonférence, ou de zéro, quand le point m est très-voisin de l'origine a, ou de l'extrémité b; et elle varie d'ailleurs d'une manière continue si le point m décrit lui-même l'arc $a\text{M}b$ d'un mouvement continu. Le segment intercepté sera donc exactement égal à un quadrant, pour une certaine position intermédiaire M du point décrivant; et à cet instant l'arc normal à la courbe en M coïncidera avec l'arc perpendiculaire à la corde $\widehat{ab}$. D'ailleurs la distance de ce point M à la corde $\widehat{ab}$ est évidemment du second ordre; et l'arc qui mesure cette distance forme avec celui qui joint le point M au milieu de la corde $\widehat{ab}$ un angle, nul ou fini, mais toujours différent d'un droit. Cet angle, en effet, est rigoureusement nul quand la courbe est un cercle, et ne peut être supposé droit quand la courbe est quelconque : car ce serait admettre que l'arc tangent en M coupe la corde $\widehat{ab}$ entre ses extrémités.

Fig. 13.

21. *Cercle de courbure géodésique.* On appelle *courbure géodésique totale* d'un arc déterminé d'une ligne sphérique, l'angle *extérieur* formé par les arcs de grand cercle tangents

aux extrémités de cet arc, ou l'arc qui mesure cet angle dans la circonférence de rayon 1; *courbure géodésique moyenne* du même arc, le rapport de la courbure totale à la longueur de l'arc, et enfin *courbure géodésique* de la ligne considérée, en chaque point de cette ligne, la limite $\frac{e_g}{ds}$ vers laquelle tend la courbure moyenne d'un arc variable de cette ligne, ayant pour origine fixe le point considéré et décroissant indéfiniment. Si la ligne considérée est un petit cercle de la sphère, la courbure géodésique moyenne d'un arc quelconque est constante, et mesurée par $\frac{1}{\tang \theta}$, θ désignant le *rayon sphérique* du petit cercle.

On appelle enfin *cercle de courbure géodésique* en un point d'une ligne sphérique le petit cercle de la sphère tangent à cette ligne en ce point, situé du même côté par rapport au grand cercle tangent, et ayant même courbure que cette ligne en ce point. Le rayon sphérique θ de ce cercle est donc défini par l'équation

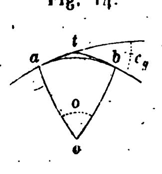
$$\frac{1}{\tang \theta} = \frac{e_g}{ds},$$

ds désignant l'arc élémentaire de la ligne considérée, et e_g l'angle extérieur des arcs de grand cercle tangents aux extrémités de cet arc, ou l'*angle de contingence géodésique*; et le pôle de ce cercle est appelé le *centre de courbure géodésique*, ou le *centre de courbure sphérique* de cette ligne, pour le point considéré.

THÉORÈME I. *Le centre de courbure sphérique d'une ligne en un de ses points coïncide avec la limite du point d'intersection de l'arc de grand cercle normal à la ligne en ce point, et d'un second arc normal, infiniment voisin du premier.*

Démonstration. Deux arcs tangents infiniment voisins et les arcs normaux correspondants forment un quadrilatère sphérique birectangle *oatb*, dont l'aire est mesurée par l'une ou l'autre de ces expressions $\hat{o} - e_g$, $\hat{o}\,(1 - \cos oa)$: la première exacte; et la

Fig. 14.



seconde supposant l'omission des infiniment petits du second ordre, ε^2. On a donc

$$(a) \qquad e_g = \hat{o}.\cos oa + \varepsilon^2;$$

d'ailleurs

$$ds = ab = \hat{o}.\sin oa + \varepsilon_1^2,$$

et l'on déduit de ces deux relations

$$\lim \frac{1}{\tang ao} = \frac{e_g}{ds} = \frac{1}{\tang \theta},$$

ou

$$\lim ao = \theta. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On peut encore établir cette proposition en remarquant que les prolongements des arcs $\widehat{ao}$, $\widehat{bo}$ sont normaux en a' et b' à la ligne $a'b'$ *supplémentaire* de la proposée ab, et que l'arc élémentaire $a'b'$ de la supplémentaire mesure l'angle de contingence géodésique correspondant e_g de la proposée. On a donc

$$\frac{e_g}{ds} = \frac{a'b'}{ab} = \frac{\sin \widehat{oa'}}{\sin \widehat{oa}} = \frac{\cos \widehat{oa}}{\sin \widehat{oa}} = \frac{1}{\tang \widehat{oa}}.$$

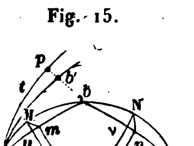
22. Le *cercle osculateur* en un point a d'une courbe sphérique abc étant, par définition, la limite d'un cercle variable passant constamment par ce point et par deux autres b et c de la courbe infiniment voisins du premier, le cercle osculateur en chaque point d'une ligne sphérique coïncide avec le cercle de courbure sphérique au même point, et c'est ce qui résulte du théorème suivant.

THÉORÈME II. *Le pôle du cercle osculateur (qui est évidemment un petit cercle de la sphère) coïncide avec la limite du point d'intersection de deux arcs normaux infiniment voisins.*

Démonstration. Soient o le pôle du petit cercle passant par a, b, c; m et n les milieux des arcs de grand cercle ab et bc;

M et N les points des arcs ab et bc de la ligne considérée, pour lesquels, suivant le Lemme II, les arcs normaux $M\mu$, $N\nu$ sont perpendiculaires aux *cordes* $\widehat{ab}$ et $\widehat{bc}$; O le point d'intersection de ces arcs, et ω le point de rencontre de $\widehat{NO}$ et de $\widehat{mo}$.

Fig. 15.



Les angles $mM\mu$, $nN\nu$ étant différents d'un droit, et $M\mu$, $N\nu$ étant du second ordre, il en est de même de $m\mu$, $n\nu$. Il en résulte que les segments $O\omega$, $o\omega$ sont du premier ordre, ainsi, par suite, que la distance $\widehat{Oo}$. Le point de rencontre de deux arcs normaux consécutifs et le pôle du cercle variable abc sont donc infiniment voisins, et les limites de ces points coïncident. C. Q. F. D.

On peut encore regarder le cercle osculateur comme *la limite d'un cercle variable tangent en* a *à la courbe considérée, et passant par un autre point* b *de la courbe, infiniment voisin du premier*. Conservons, en effet, la même figure, et menons, en outre, l'arc normal en a qui rencontre en I et i les arcs $\widehat{M\mu O}$, $\widehat{mo}$. On reconnaît encore que le segment Ii est du premier ordre, ou que le pôle i du cercle variable dont il s'agit est infiniment voisin du point de rencontre I des arcs normaux en a et M; et, par suite, que les limites de ces points coïncident.

Théorème III. *Une ligne sphérique* ab *et le cercle osculateur de cette ligne en un point* a *étant rapportés au grand cercle tangent en ce point, la différence des ordonnées curvilignes des deux courbes est du troisième ordre, l'abscisse commune étant du premier.*

Démonstration. Considérant le petit cercle, de pôle i, tangent à la courbe en a et passant par le point b; menons au point b de ce cercle l'ordonnée bp rencontrant en b' le cercle osculateur de la courbe au point a. Les deux cercles ab' et ab étant tangents en a et leurs rayons étant infiniment peu différents puisque, d'après le théorème précédent, le premier est la limite du second; le Lemme I est applicable, et la différence bb'

de leurs ordonnées est du troisième ordre. Or, le point b appartenant à la courbe primitive elle-même, bb' est aussi la différence des ordonnées de la courbe et du cercle osculateur; et le théorème est démontré. — La réciproque est vraie et s'établit aisément.

23. THÉORÈME IV. *Chacun des arcs normaux à une courbe sphérique quelconque est tangent à la développée sphérique de cette ligne, c'est-à-dire à la courbe formée par les intersections successives des arcs normaux à cette ligne; et l'arc élémentaire de la développée est égal à la différence correspondante des rayons de courbure sphérique de la ligne primitive.*

Démonstration. Soient a, b, c,..., des points successifs de la ligne primitive, et o, o'..., les points d'intersection des arcs normaux à cette ligne en a et b, en b et c, etc.

Fig. 16.

Soient, en outre, α la limite de o quand on suppose que, a étant fixe, b se rapproche indéfiniment de a; β la limite de o' quand on suppose que, b étant fixe, c se rapproche indéfiniment de b, etc., et soit $\alpha\beta$ la courbe formée par tous ces points limites, ou la développée.

1). Si l'on abaisse l'arc $\widehat{\alpha p}$ perpendiculaire sur $\widehat{\beta ob}$, on a dans le triangle $op\alpha$,

$$\alpha p = o\alpha . \sin o.$$

Or le segment $o\alpha$ est du premier ordre, puisque le point α est, par définition, la limite du point o; il en est de même de l'angle o, puisque les points a et b sont infiniment voisins; la distance αp est, par suite, du second ordre; et ce résultat suffit pour établir que l'arc βb est tangent en β à la courbe $\alpha\beta$, dont l'arc $\alpha\beta$ est d'ailleurs du premier ordre.

2). En second lieu, la différence des arcs $\widehat{oa}$ et $\widehat{ob}$ étant au moins du second ordre (on peut, en effet, établir qu'elle est du

troisième), on peut poser, en négligeant les infiniment petits de cet ordre,

$$\widehat{ob} - \widehat{oa} = 0, \quad \text{ou} \quad (\beta b - \beta o) - (\alpha a + o\alpha) = 0;$$

ou encore

$$\alpha o + o\beta = \widehat{\beta b} - \widehat{\alpha a},$$

ou enfin

$$d\varpi = \text{arc}\,\alpha\beta = d\theta,$$

en remplaçant $\alpha o + o\beta$ par son égal, au troisième ordre près, arc $\alpha\beta$.

Corollaire. *Un arc fini quelconque* $\alpha\lambda$ *de la développée, correspondant à l'arc* al *de la ligne primitive, est égal à la différence* $\widehat{l\lambda} - \widehat{a\alpha}$ *des rayons de courbure sphérique de cette ligne en ses extrémités* a *et* l. De plus, *Concevant un fil partiellement enroulé sur la développée* $\alpha\lambda$ *et dont l'extrémité coïnciderait actuellement avec le point* a, *et déroulant ce fil, la portion libre sera toujours dirigée suivant un grand cercle, et son extrémité venant coïncider successivement avec les points* a, b,..., *décrira la ligne primitive tout entière.*

24. *Rayons de première et de seconde courbure d'une ligne sphérique; relation entre ces rayons, et représentation géométrique du rayon de seconde courbure.*

Notation. Nous désignerons, dans tout ce qui suit, les angles de contingence et de torsion en chaque point d'une ligne sphérique par les lettres e et h; l'arc élémentaire par ds, les rayons de première et de seconde courbure par r_1 et r_2, et, comme précédemment, l'angle de contingence et le rayon de courbure géodésiques par e_g et r_g; enfin la lettre θ désignera l'inclinaison du plan osculateur sur le plan tangent à la sphère au même point. D'ailleurs, quand nous aurons à considérer, en même temps que la ligne primitive, sa développée sphérique, nous désignerons les éléments analogues de celle-ci par les mêmes lettres accentuées.

Cela posé, le rayon de première courbure r_1 d'une ligne sphérique, ou le rayon du cercle osculateur, n'est autre chose,

d'après le Théorème II, que le rayon du cercle de courbure géodésique. Or le rayon *sphérique* θ de ce dernier étant défini par l'équation

$$r_g = \frac{ds}{e_g} = \tang \theta,$$

on a, pour son rayon dans le plan,

$$(5) \qquad r_1 = \frac{ds}{e} = \sin \theta;$$

les angles de simple contingence et de contingence géodésique étant liés par la relation

$$(6) \qquad e_g = e \cos \theta,$$

déjà établie d'une manière générale, et dans laquelle θ désigne l'inclinaison du plan osculateur sur le plan tangent à la sphère : et l'on déduit aussi de ces deux dernières équations,

$$(5, 6) \qquad e = \sqrt{\overline{ds}^2 + \overline{e_g}^2},$$

pour l'angle de contingence *absolue* de la ligne considérée.

D'un autre côté, la surface polaire relative à une ligne sphérique quelconque se réduisant à un cône dont le sommet est au centre de la sphère, et ayant pour base sur celle-ci la développée sphérique de cette ligne, d'après les Théorèmes II et IV, l'angle de deux génératrices consécutives de ce cône, ou l'angle de torsion de la ligne considérée, est mesuré par l'arc élémentaire de la développée, qui est lui-même égal à $d\theta$. On a donc, pour le rayon de seconde courbure,

$$r_2 = \frac{ds}{h} = \frac{ds}{d\theta}, \quad \text{ou} \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r_2}:$$

et si l'on a égard à cette relation, en différentiant l'équation (6) par rapport à s, il vient

$$\frac{dr_1}{ds} = \cos \theta . \frac{d\theta}{ds} = \frac{\cos \theta}{r_2},$$

ou

$$r_2 . \frac{dr_1}{ds} = \cos \theta,$$

dont la combinaison avec l'équation (5) fournit, par l'élimination de θ, la relation découverte par M. J.-A. Serret, entre les rayons de première et de seconde courbure d'une ligne sphérique,

$$(7) \qquad r_1^2 + r_2^2\left(\frac{dr_1}{ds}\right)^2 = 1.$$

Enfin, si l'on considère, en même temps que la ligne proposée l, sa développée sphérique l', on a déjà vu que l'arc élémentaire de cette dernière mesure l'angle de torsion de la proposée, et l'on aperçoit aisément que son angle de contingence géodésique est égal à l'angle de simple contingence de la proposée :

$$ds' = h, \quad e'_g = e;$$

et si l'on divise ces équations membre à membre, on trouvera pour le rayon de courbure géodésique de la développée

$$(8) \qquad r'_g = \operatorname{tang}\theta' = \frac{r_1}{r_2}.$$

Cette équation peut s'écrire

$$(8') \qquad r_2 = \frac{\sin\theta}{\operatorname{tang}\theta'} = \frac{\sin aa'}{\operatorname{tang} a'a''},$$

a, a', a'' désignant trois points *correspondants* de la ligne proposée, de sa développée et de la développée de cette dernière;

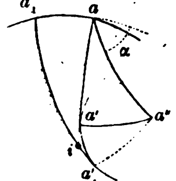


Fig. 17.

et comme le triangle rectangle $aa'a''$ fournit la relation

$$\cot \widehat{a'aa''} = \frac{\sin aa'}{\operatorname{tang} a'a''},$$

on a

$$r_2 = \cot \widehat{a'aa''}.$$

Ainsi, *en chaque point d'une ligne sphérique, le rayon de seconde courbure est mesuré par la tangente trigonométrique de l'inclinaison, sur cette ligne, de l'arc de grand cercle qui joint le point considéré au centre de courbure sphérique correspondant de la développée.*

25. Théorème V. *Une ligne sphérique dont la première courbure (courbure absolue, ou courbure géodésique) est constante, est un petit cercle de la sphère.*

Démonstration. Le rayon de première courbure étant constant, il résulte de la formule (6) que l'inclinaison du plan osculateur de la ligne considérée sur le plan tangent à la sphère est aussi constante : donc, le plan osculateur de cette ligne est un plan fixe, et cette ligne est un petit cercle; ou bien le plan osculateur roule sur une sphère concentrique à la première, et d'un rayon égal à $\cos\theta$. Mais, dans cette seconde hypothèse, l'intersection de deux plans osculateurs successifs serait tangente à la sphère intérieure, et l'on sait, au contraire, que cette intersection est tangente à la ligne considérée et, par suite, à la sphère extérieure: cette hypothèse est donc inadmissible, et le théorème se trouve établi.

26. La détermination de la ligne sphérique dont la seconde courbure est constante, présente de plus grandes difficultés. La représentation sphérique de r_2, que nous avons indiquée dans le n° 24, conduit cependant à une propriété de cette ligne, qui peut être utile pour sa définition ultérieure : à savoir que *le grand cercle joignant un point quelconque de cette ligne au centre de courbure sphérique correspondant de sa développée, coupe la ligne proposée sous un angle constant.*

Il résulte encore de la définition même de cette courbe et des liaisons qui existent entre une ligne sphérique quelconque et sa développée, que *un arc quelconque de la courbe est proportionnel à l'arc correspondant de sa développée sphérique.* Cette propriété, ou la relation équivalente

$$\frac{\sin\theta}{\tang\theta'} = \text{constante},$$

se transforme, à la limite, quand le rayon de la sphère augmente indéfiniment, en celle-ci

$$\frac{\rho}{\rho'} = \text{constante},$$

ρ et ρ' désignant les rayons de courbure de la courbe plane

transformée et de sa développée ; et cette équation représente une spirale logarithmique. Or, la loxodromie sphérique se transformant aussi en une spirale, dans les mêmes circonstances, la possibilité de l'identité de ces deux lignes sphériques résulte de cette analogie. Mais nous verrons un peu plus loin que l'expérience contredit cette induction, et que la ligne sphérique dont la seconde courbure est constante n'est pas une loxodromie.

Observation. On vient de supposer que « *la relation* $\frac{\rho}{\rho'}=$ constante *ayant lieu entre les rayons de courbure correspondants d'une ligne plane* l *et de sa développée* l', *cette ligne est nécessairement une spirale logarithmique.* Cette proposition, que nous aurons d'ailleurs à employer dans la suite, peut être établie en quelques mots de la manière suivante :

Si l'on désigne par a, a', a'', trois points correspondants de la ligne l, de sa développée l' et de la développée l'' de cette dernière, la relation donnée exprime d'abord que l'hypoténuse aa'' du triangle $aa'a''$ coupe la ligne l sous un angle constant. D'ailleurs les éléments correspondants des deux lignes l, l' étant, par suite de la même relation, dans un rapport constant, les lignes l, l' sont semblables, leurs éléments homologues étant rectangulaires. Enfin la ligne l' étant semblable à la ligne l est, comme celle-ci, semblable à sa développée l'', les éléments homologues de ces deux lignes étant encore rectangulaires. Il en résulte que les lignes l, l'' sont semblables entre elles et semblablement placées. Donc la droite aa'', qui joint deux points homologues de ces lignes et qui coupe déjà la ligne l sous un angle constant, passe par un point fixe o, centre de similitude de ces lignes ; et la ligne l est une spirale logarithmique.

27. THÉORÈME VI. *Toute hélice sphérique est une développante d'un petit cercle de la sphère.*

Première démonstration. Pour que la ligne considérée soit

une hélice sphérique, il faut et il suffit, d'après un théorème dû à M. Bertrand, et que nous établirons plus loin, que le rapport de ses deux courbures $\frac{r_1}{r_2}$ demeure constant, ou, d'après la formule (8), que le rayon de courbure sphérique θ' de la développée demeure constant : ce qui exige que cette développée soit un petit cercle, la courbe considérée étant dès lors une développante de ce petit cercle.

Deuxième démonstration. On peut parvenir autrement à ce résultat en remarquant que la courbe formée par les extrémités des arcs de grand cercle tangents à une ligne sphérique quelconque, et égaux à des quadrants, peut être regardée comme le lieu des extrémités des rayons de la sphère parallèles aux tangentes de cette ligne : si donc cette dernière est une hélice, la courbe auxiliaire sera un petit cercle de la sphère. Or, on reconnaît aisément que la développée sphérique de la ligne primitive et la courbe auxiliaire sont, dans le cas général, deux lignes supplémentaires, ayant par suite même développée; et comme, dans le cas actuel, la développée de la courbe auxiliaire se réduit à un point, il en est de même de la développée *seconde* de l'hélice sphérique, et la première développée de cette ligne se réduit à un petit cercle de la sphère.

C. Q. F. D.

Enfin, on parvient encore à ce résultat par les considérations ordinaires, en remarquant que la surface polaire relative à la ligne cherchée est un cône concentrique à la sphère, et ayant pour base sur cette dernière la développée sphérique de cette ligne. Or la ligne considérée étant une hélice, le cône, qui en est la surface polaire, est de révolution; et sa base sur la sphère, ou la développée sphérique de l'hélice, est un petit cercle.

28. *Expressions diverses du rayon de courbure géodésique d'une ligne sphérique.*

1). Soit une ligne sphérique quelconque aa_1 dont chaque point est défini par sa distance sphérique ρ à un point fixe A,

pris sur la surface de la sphère, et par l'angle ω que le grand cercle qui mesure cette distance fait avec le grand cercle fixe Ax. Menons les rayons vecteurs sphériques $\widehat{Aa} = \rho$, $\widehat{Aa_1} = \rho + d\rho$, ainsi que les arcs de grand cercle at, a_1t tangents à la courbe en a, a_1; décrivons, du point A comme pôle, l'arc de petit cercle $a\alpha$ et menons les rayons $\overline{ca}$, $\overline{c\alpha}$, de ce cercle; désignons enfin par V et V + dV les angles aigus sous lesquels les arcs Aa, Aa_1 coupent la courbe en a, a_1; et par $d\omega$ l'angle aAa_1 ou son égal $\widehat{ac\alpha}$.

Fig. 18.

Le triangle $a\alpha a_1$, rectangle en α, donne d'abord pour l'arc élémentaire de la ligne considérée

$$(a) \qquad ds = \sqrt{\overline{d\rho}^2 + \overline{d\omega}^2 \sin^2\rho};$$

la substitution de la portion de zone A$a\alpha$ au quadrilatère sphérique Aata_1 et l'évaluation directe de l'aire de ce dernier fournissent ensuite l'égalité

$$(1 - \cos\rho)\, d\omega = d\omega + dV - e_g,$$

ou

$$(b) \qquad e_g = dV + d\omega . \cos\rho.$$

Cela posé, *si l'on prend d'abord l'angle ω pour variable indépendante,* on aura, comme on sait,

$$\tang V = \sin\rho : \frac{d\rho}{d\omega} = \sin\rho : \rho',$$

d'où

$$\frac{dV}{d\omega} = \frac{\rho'^2 \cos\rho - \rho'' \sin\rho}{\rho'^2 + \sin^2\rho}.$$

Cette valeur, substituée dans la formule (b), donne la valeur du rapport $\frac{e_g}{d\omega}$; et comme la formule (a) fournit l'expression du rapport $\frac{ds}{d\omega}$, en divisant ce rapport par le précédent on

trouve enfin

$$(9)\qquad r_g = \operatorname{tang}\theta = \frac{ds}{e_g} = \frac{(\sin^2\rho + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\cos\rho.\sin^2\rho + 2\rho'^2\cos\rho - \rho''\sin\rho}.$$

Supposons, en second lieu, que l'on prenne l'*arc s pour variable indépendante,* on aura dans le triangle $a\alpha a_1$

$$\cos V = \frac{d\rho}{ds} = \rho',$$

d'où

$$\frac{dV}{ds} = -\frac{\rho''}{\sqrt{1-\rho'^2}}.$$

On déduit d'ailleurs de la formule (a),

$$(a')\qquad \frac{d\omega}{ds} = \frac{\sqrt{1-\rho'^2}}{\sin\rho};$$

et si l'on porte ces valeurs dans l'équation (b), préalablement divisée par ds, on trouve

$$(9')\qquad r_g = \operatorname{tang}\theta = \frac{\sin\rho\sqrt{1-\rho'^2}}{(1-\rho'^2)\cos\rho - \rho''\sin\rho}.$$

2). Enfin, en désignant par p l'arc de grand cercle abaissé de l'origine des rayons vecteurs sur l'arc tangent au point a de la ligne considérée, et *regardant p et ρ comme formant un système particulier de coordonnées,* on a, en généralisant une formule d'Euler,

$$(9'')\qquad r_g = \operatorname{tang}\theta = \frac{\sin\rho.d\rho}{d.\sin p}.$$

Pour établir cette formule le plus simplement possible, substituons à la courbe considérée son cercle osculateur en a, dont le pôle est a'; menons $\widehat{Aa'}$, posons $\widehat{aa'} = \theta$ et $\widehat{Aa'} = \alpha$. Le triangle rectangle Apa donne

Fig. 19.

$$\sin p = \sin\rho.\sin\widehat{Aap} = \sin\rho\ \cos\widehat{Aaa'};$$

et si l'on substitue cette valeur dans la formule

$$\cos\alpha = \cos\theta.\cos\rho + \sin\theta.\sin\rho.\cos\widehat{Aaa'},$$

fournie par le triangle Aaa', il vient

$$\cos\alpha = \cos\theta.\cos\rho + \sin\theta.\sin p\,;$$

d'où

$$\cos\theta.\sin\rho.d\rho = \sin\theta.d\sin p,$$

ce qui est la formule énoncée.

On peut encore établir directement cette formule en abaissant les arcs $\widehat{Ap}$, $\widehat{Ap_1}$, perpendiculaires sur les arcs tangents en a, a_1, et dont le second rencontre en q l'arc tangent en a, de manière que $p_1q = dp$. Les triangles infinitésimaux Aaa_1, ap_1q, et le triangle rectangle Apa fournissent les relations

$$ds = \frac{d\rho}{\cos V}, \quad \frac{1}{e_g} = \frac{\sin ap_1}{p_1q} = \frac{\sin ap}{dp},$$

$$\sin\widehat{ap} = \operatorname{tang} p.\cot V = \frac{\sin\rho \ \sin V}{\cos p}\cot V = \frac{\sin\rho.\cos V}{\cos p},$$

dont la multiplication membre à membre donne, après simplification, la formule cherchée

$$\frac{ds}{e_g} = \frac{\sin\rho.d\rho}{\cos p.dp} = \frac{\sin\rho.d\rho}{d.\sin p}.$$

Remarque I. La formule (9) ne diffère que par la notation de l'une des formules données par Gudermann sur cette matière (*Grundriss der analytischen Sphärik*, page 34).

Remarque II. La formule (9″) suppose que l'origine des rayons vecteurs soit située du même côté que la ligne sphérique elle-même, par rapport au grand cercle tangent à cette ligne au point considéré. Elle devrait s'écrire

$$(9''') \qquad r_g = \operatorname{tang}\theta = -\frac{\sin\rho.d\rho}{d.\sin p}$$

dans le cas contraire.

29. *Application des formules précédentes à l'ellipse et à la loxodromie sphériques.*

1). Supposons d'abord l'*ellipse sphérique rapportée à son centre o*; et concevons l'ellipse plane également rapportée à

son centre, qui en est la perspective sur le plan tangent en o, le point de vue étant au centre de la sphère : la considération de cette dernière, si utilement employée déjà par M. Borgnet, dans son excellent *Essai de géométrie analytique de la sphère* (Tours, 1847), devant nous dispenser de tout calcul nouveau, par l'emploi des formules bien connues relatives à l'ellipse plane. L'équation de celle-ci, suivant les coordonnées particulières r et p, est

$$p^2(a^2+b^2-r^2)=a^2b^2,$$

a, b, r et p désignant les demi-axes de l'ellipse plane, ou les tangentes trigonométriques des demi-axes de l'ellipse sphérique; le rayon vecteur d'un point quelconque de la courbe, et la distance du centre à la tangente en ce point. On aura donc, pour l'ellipse sphérique rapportée aux coordonnées analogues ρ et p, l'équation

$$\operatorname{tang}^2 p\,(a^2+b^2-\operatorname{tang}^2\rho)=a^2b^2,$$

ou

$$(c)\qquad \sin^2 p\,(a^2b^2+a^2+b^2-\operatorname{tang}^2\rho)=a^2b^2:$$

de là, en différentiant et appliquant ensuite la formule (9″),

$$(a^2b^2+a^2+b^2-\operatorname{tang}^2\rho)\,d.\sin p-\sin p.\operatorname{tang}\rho.\frac{d\rho}{\cos^2\rho}=0,$$

$$\frac{\sin\rho.d\rho}{d.\sin p}=\frac{(a^2b^2+a^2+b^2-\operatorname{tang}^2\rho)\cos^3\rho}{\sin p}=\frac{a^2b^2\cos^3\rho}{\sin^3 p};$$

$$(10)\qquad r_g=\operatorname{tang}\theta=a^2b^2.\frac{\cos^3\rho}{\sin^3 p}.$$

A l'extrémité de l'un des axes, de l'axe 2α, par exemple, la formule devient

$$r_{g,\alpha}=\frac{b^2}{a}=\frac{\operatorname{tang}^2\beta}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

2). Supposons, en second lieu, l'*ellipse sphérique rapportée à l'un de ses foyers* f, *pris pour origine*, et cherchons d'abord son équation entre les coordonnées ρ et p.

On a

$$\sin p=\sin\rho.\sin V=\sin\rho.\cos i=\sin\rho\cos\frac{\widehat{fmf'}}{2},$$

V et i désignant les angles complémentaires que forme le rayon vecteur $\widehat{fm}$ avec l'arc tangent et l'arc normal en m : le triangle fmf' donne d'ailleurs la relation

$$(d)\quad \left\{ \begin{aligned} \sin V = \cos\frac{\widehat{fmf'}}{2} &= \sqrt{\frac{\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha-\gamma)}{\sin\rho\sin\rho'}} \\ &= \sqrt{\frac{\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha-\gamma)}{\sin\rho\sin(2\alpha-\rho)}}, \end{aligned} \right.$$

et l'on en déduit, pour l'équation de l'ellipse,

$$(e)\qquad \sin^2 p = \sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha-\gamma).\frac{\sin\rho}{\sin(2\alpha-\rho)},$$

le grand axe et l'excentricité de la courbe étant représentés par 2α et 2γ.

Différentiant cette équation, et ayant égard à la formule (9''), il vient d'abord

$$\begin{aligned} 2\sin p.d\sin p &= \sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha-\gamma) \\ &\quad\times\frac{\sin(2\alpha-\rho)\cos\rho+\sin\rho\cos(2\alpha-\rho)}{\sin^2(2\alpha-\rho)}d\rho \\ &= \frac{\sin 2\alpha.\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha-\gamma)}{\sin^2(2\alpha-\rho)}.d\rho, \end{aligned}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\rho.d\rho}{d.\sin p} = \frac{2\sin\rho\sin p\sin^2(2\alpha-\rho)}{\sin 2\alpha.\sin(\alpha+\gamma).\sin(\alpha-\gamma)}.$$

De là enfin, en remplaçant $\sin p$ par $\sin\rho\ \sin V$, et utilisant la formule (d),

$$\tan\theta = \frac{2\sin V.\sin^2\rho.\sin^2(2\alpha-\rho)}{\sin 2\alpha\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha-\gamma)} = \frac{2\sin V.\dfrac{\sin^2(\alpha+\gamma)\sin^2(\alpha-\gamma)}{\sin^4 V}}{\sin 2\alpha.\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha-\gamma)}$$

ou

$$(11)\qquad r_g = \tan\theta = \frac{2\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha-\gamma)}{\sin 2\alpha}.\frac{1}{\sin^3 V}.$$

On peut d'ailleurs introduire dans cette formule l'arc nor-

mal $\widehat{mn} = N$ terminé à l'axe focal ff'. Car si l'on désigne par n la bissectrice de l'angle intérieur m d'un triangle *rectiligne* fmf', par r et r' les côtés adjacents, on démontre aisément cette formule

$$\frac{n}{r} + \frac{n}{r'} = 2\cos\frac{m}{2};$$

et en regardant ce triangle comme la perspective sur le plan tangent en m du triangle sphérique fmf', on en déduit pour ce dernier

$$\frac{\tang N}{\tang\rho} + \frac{\tang N}{\tang(2\alpha - \rho)} = 2\sin V:$$

d'où, par des transformations successives,

$$\tang N \sin(\rho + 2\alpha - \rho) = \tang N \sin 2\alpha = 2\sin V \sin\rho \sin(2\alpha - \rho);$$

ou, en multipliant par $\sin V$ et remarquant que

$$\sin\rho \sin(2\alpha - \rho)\sin^2 V = \sin(\alpha + \gamma)\sin(\alpha - \gamma),$$

d'après la formule (d),

$$\tang N . \sin V = \frac{2\sin(\alpha + \gamma)\sin(\alpha - \gamma)}{\sin 2\alpha}$$

qui, combinée avec la formule (11), nous donne enfin

$$(12) \qquad \tang\theta = \frac{\tang N}{\sin^2 V} = \frac{\tang N}{\cos^2 i}.$$

Remarque I. Le produit $\tang N . \sin V$ étant constant, il résulte de la formule (11) que *le rayon de courbure géodésique en chaque point d'une ellipse sphérique est proportionnel au cube de la tangente trigonométrique de la portion de l'arc normal à la courbe en ce point, terminé à l'axe focal.*

Remarque II. La formule (12) démontre immédiatement cette construction du centre de courbure géodésique de l'ellipse sphérique, à laquelle j'étais parvenu par d'autres considérations (*) : *Par le point de rencontre de l'arc normal et de*

(*) *Des Méthodes en Géométrie*, page 87. (Mallet-Bachelier, 1855.)

l'axe focal, et perpendiculairement au premier, mener un arc de grand cercle terminé au rayon vecteur qui joint l'un des foyers au point considéré; et élever, par son extrémité, un arc de grand cercle perpendiculaire au rayon vecteur et rencontrant l'arc normal au point cherché.

3). La ligne aa_1 étant une *loxodromie* ayant pour pôle l'origine des rayons vecteurs, on a, entre le rayon vecteur $\widehat{Aa} = \rho$ d'un point quelconque de la courbe et l'arc $\widehat{Ap} = p$, perpendiculaire au grand cercle tangent en a, la relation

$$(f) \qquad \sin p = \sin \rho . \sin V,$$

d'où

$$d.\sin p = \sin V . \cos \rho . d\rho,$$

puisque, par la définition même de la courbe, l'angle V est constant; et l'on trouve, en appliquant la formule (9''),

$$(13) \qquad \operatorname{tang} \theta = \frac{\operatorname{tang} \rho}{\sin V},$$

ou

$$\cos \widehat{Aaa'} = \operatorname{tang} \widehat{Aa} . \cot \widehat{aa'};$$

a' étant le centre de courbure géodésique de la loxodromie en a (*voir* la figure de la page 42). Il résulte de cette formule que le triangle aAa' est rectangle en A, de sorte que *le centre de courbure géodésique, en chaque point de la loxodromie, s'obtient par la même construction que le centre de courbure de la spirale logarithmique qui en est la projection stéréographique.* Mais là s'arrête d'ailleurs l'analogie entre les développées plane et sphérique de ces deux lignes. Car si le triangle aAa', rectangle en A, est supposé rectiligne, l'angle Aaa' étant constant, il en est de même de l'angle $Aa'a$, qui est précisément égal à V; et de là résulte l'identité de la spirale et de sa développée. Mais si ce triangle est sphérique, l'angle Aaa' étant constant et le côté Aa variable, l'angle $Aa'a$ ne saurait être constant; et, par suite, la développée sphérique de la loxodromie n'est pas soumise au même mode de construction que cette ligne elle-même.

Si l'on abaisse encore $\widehat{Ap'}$ perpendiculaire sur $\widehat{aa'}$, on aura, en posant $\widehat{Aa'} = \rho'$, $\widehat{Ap'} = p'$, et désignant par θ' le rayon de courbure géodésique en a' de la développée de la loxodromie,

$$\operatorname{tang}\theta' = \frac{\sin\rho'.d\rho'}{d.\sin p'};$$

mais on trouve aisément sur la figure

$$\sin\rho = \operatorname{tang}\rho'.\operatorname{tang}V, \quad \sin p' = \sin\rho.\cos V,$$

d'où

$$(f') \qquad \sin p' = \sin V.\operatorname{tang}\rho';$$

de là, en différentiant et substituant dans l'expression de $\operatorname{tang}\theta'$,

$$\operatorname{tang}\theta' = \frac{\sin\rho'.\cos^2\rho'}{\sin V} = \frac{\sin\theta.\cos^2\rho'}{\operatorname{tang}V},$$

ou encore

$$r_1 = \frac{\sin\theta}{\operatorname{tang}\theta'} = \frac{\operatorname{tang}V}{\cos^2\rho'},$$

r_1 désignant [*voir* page 37, formule (8')] le rayon de seconde courbure de la loxodromie. Il résulte de cette dernière formule, dans laquelle $\frac{1}{\cos^2\rho'}$ est un nombre variable, cette conséquence négative déjà annoncée (*voir* page 38, n° 26) que *la ligne sphérique dont la seconde courbure est constante n'est pas une loxodromie.*

III.

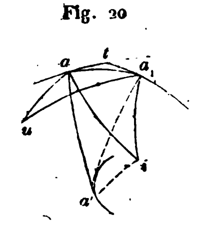
Des enveloppes sphériques.

30. *De l'enveloppe sphérique d'une série d'arcs de grand cercle passant par les différents points d'une ligne donnée, et coupant cette ligne sous un angle qui demeure constant, ou qui varie suivant une loi donnée.*

Soit i le point d'intersection de deux arcs de grand cercle

infiniment voisins ai, $a_1 i$, coupant sous les angles $\widehat{a}$ et $\widehat{a+da}$ la ligne sphérique aa_1. Menons les arcs de grand cercle tangents à cette ligne en a, a_1, se coupant en t et formant en ce point un angle aigu qui est l'angle de contingence géodésique e_g de la ligne aa_1 dont nous désignerons l'arc élémentaire par ds. Le triangle infinitésimal iaa_1 donnant la relation

Fig. 20



$$(a)\qquad \widehat{i} = \frac{ds.\sin a}{\sin \widehat{ia}},$$

on voit que la position du point i sera déterminée si l'on parvient à une seconde expression de l'angle i. Or il suffit, pour la trouver, de recourir à une méthode déjà employée, en assimilant d'abord le quadrilatère sphérique $iata_1$ à une portion de zone, et en évaluant directement ensuite l'aire de ce quadrilatère. On obtient ainsi l'égalité

$$\widehat{i}(1 - \cos ia) = \widehat{i} - e_g - da,$$

ou

$$(a')\qquad \widehat{i} = \frac{e_g + da}{\cos ia},$$

dont la comparaison avec la relation (a) fournit la formule cherchée

$$(14)\qquad \operatorname{tang} ai = \sin a \,.\, \frac{ds}{e_g + da}.$$

Si l'on suppose, en outre, que par les mêmes points de la ligne aa_1 on mène des arcs de grand cercle perpendiculaires aux précédents et se coupant en u, on voit aisément que la position-limite de leur intersection est donnée par la formule

$$(15)\qquad \operatorname{tang} au = \cos a \,.\, \frac{ds}{e_g + da},$$

$\widehat{a}$ et $\widehat{da}$ ayant les mêmes valeurs numériques et le même signe

que dans la formule (1) : nous ferons dans la suite un usage très-fréquent de ces formules.

Examinons, en particulier, le cas où *les arcs* ai *coupent la ligne* aa_1 *sous un angle constant : da* sera nul dans la formule (14), $\frac{ds}{e_g}$ représentera la tangente trigonométrique de l'arc aa' normal à la ligne donnée et terminé à sa développée; et l'on aura

$$\tang ai = \sin a . \tang aa',$$

ou

$$\tang ai = \tang aa' . \cos \widehat{iaa'},$$

qui démontre que le triangle iaa' est rectangle en i. Donc, *si par chacun des points d'une ligne sphérique on mène un arc de grand cercle coupant cette ligne sous un angle constant, le point où l'un de ces arcs touche son enveloppe s'obtient en abaissant, du centre de courbure géodésique correspondant de la ligne proposée, un arc de grand cercle normal à l'arc considéré.* On a, comme on sait, une construction analogue pour les courbes planes (Réaumur); et la détermination du centre de courbure géodésique de la loxodromie présente une application *inverse* de cette construction.

31. *De l'enveloppe sphérique d'une série d'arcs de grand cercle, dans le cas où chacun de ces arcs est défini par deux de ses points. Rayon de courbure d'une roulette sphérique; applications diverses.*

Soit aba' un arc de grand cercle mobile, et supposons que son mouvement sur la sphère à laquelle il appartient soit défini par les mouvements simultanés de deux de ses points a et b, qui décrivent dans le même temps les arcs très-petits aa_1 et bb_1 : l'arc mobile occupant dans l'instant suivant la position a_1b_1. La limite du point d'intersection a' des deux arcs infiniment voisins ab, a_1b_1, c'est-à-dire le point où l'arc mobile ab touche son enveloppe, s'obtiendra (comme dans le cas analogue du problème relatif à l'enveloppe plane d'une droite mobile) par la comparaison des triangles $a'aa_1$, $a'bb_1$: ces tri-

angles donnent, en effet,

$$\hat{a'} = \frac{aa_1 . \sin a}{\sin a' a}, \quad \hat{a'} = \frac{bb_1 . \sin b}{\sin a' b};$$

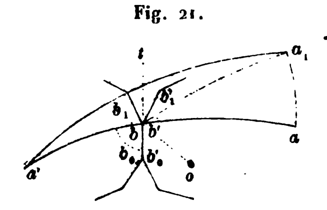
d'où

$$(b) \qquad \frac{\sin a' a}{\sin a' b} = \frac{aa_1}{bb_1} \cdot \frac{\sin a}{\sin b}.$$

Considérons d'une manière spéciale la *roulette sphérique* aa_1 engendrée par le point a invariablement lié à la ligne $b'b'_1$ qui roule sur la ligne fixe bb_1 ; la ligne fixe, la ligne et le point mobiles appartenant à une même sphère : et regardons les lignes fixe et mobile comme des polygones sphériques de côtés infiniment petits et égaux deux à deux ; l'angle extérieur de deux côtés consécutifs de l'un de ces polygones pouvant être pris, à la limite, pour l'angle de contingence géodésique de la ligne correspondante.

Cela posé, les deux polygones étant actuellement en contact suivant les éléments $b_0 b$, $b'_0 b'$, le mouvement de la figure mobile dans l'instant suivant consistera en une rotation s'effectuant autour du diamètre ob, et en vertu de laquelle le point mobile décrira un petit arc de cercle aa_1, ayant pour pôle le point b ; l'angle décrit $\widehat{aba_1}$ étant égal à $\widehat{b_1 bb'_1}$,

Fig. 21.



c'est-à-dire à $e_g \pm e'_g$: par suite, en posant $\widehat{ba} = \rho$, $bb_1 = b'b'_1 = ds$, et désignant par r_g, r'_g les rayons de courbure géodésique en b, b' des lignes fixe et mobile, on aura

$$bb_1 = ds, \qquad aa_1 = (e_g \pm e'_g) \sin \rho = ds \left(\frac{1}{r_g} \pm \frac{1}{r'_g}\right) \sin \rho,$$

d'où

$$(b') \qquad \frac{aa_1}{bb_1} = \left(\frac{1}{r_g} \pm \frac{1}{r'_g}\right) \sin \rho.$$

On voit d'ailleurs que les arcs $\widehat{ab}$, $\widehat{a_1 b_1}$ sont normaux à la roulette en a, a_1 ; et que, ces deux arcs allant se couper au

point a', la limite de aa' est le rayon de courbure sphérique de la roulette en a : nous le désignerons par θ, et nous appellerons V l'inclinaison de l'arc ab sur la ligne fixe bb_1. Or, la comparaison des formules (b) et (b') donne, en remplaçant $\sin a$ par 1 et $\sin b$ par $\sin V$, la formule cherchée

$$(B) \qquad \frac{\sin\theta}{\sin(\theta-\rho)} = \left(\frac{1}{r_g} \pm \frac{1}{r'_g}\right)\frac{\sin\rho}{\sin V},$$

dont nous allons faire quelques applications.

1). Que l'on considère en particulier la *cycloïde sphérique* engendrée par un point de la circonférence d'un petit cercle de rayon sphérique R roulant sur un grand cercle de la sphère: on aura d'abord, en posant $r_g = \infty$, $r'_g = \tang R$,

$$\frac{\sin\theta}{\sin(\theta-\rho)} = \frac{\sin\rho}{\sin V.\tang R}.$$

Si l'on abaisse ensuite du pôle du petit cercle un arc perpendiculaire sur le rayon vecteur ρ et divisant ce rayon en deux parties égales, on aura dans le triangle sphérique résultant

$$\sin V = \cot R.\tang\frac{\rho}{2}, \quad \text{ou.} \quad \sin V.\tang R = \tang\frac{\rho}{2} :$$

d'où, en substituant dans la formule précédente,

$$\frac{\sin\theta}{\sin(\theta-\rho)} = \frac{\sin\rho}{\tang\frac{\rho}{2}} = 2\cos^2\frac{\rho}{2} = 1 + \cos\rho.$$

On déduit de cette dernière

$$\tang\theta = -\frac{\sin\rho(1+\cos\rho)}{1-\cos\rho-\cos^2\rho}.$$

Cette formule a déjà été donnée par Gudermann (*Grundriss der analytischen Sphärik*, p. 46), mais sans construction; et sous sa forme actuelle elle en paraît, en effet, peu susceptible. Toutefois, si l'on calcule au moyen de cette formule la valeur de $\tang(\theta-\rho)$, on trouve, toutes réductions faites, cette équation très-simple :

$$(x_1) \qquad \tang(\theta-\rho) = \sin\rho,$$

qui conduit à la construction suivante : *Sur le rayon vecteur sphérique* ρ, *qui joint le point décrivant au point de contact actuel du cercle mobile sur le grand cercle fixe, construire un triangle rectangle dont l'angle droit soit adjacent au point de contact, l'angle adjacent au point décrivant étant de 45 degrés; et rabattre le second côté de l'angle droit de ce triangle sur le prolongement du premier;* l'extrémité de cet arc rabattu est le centre de courbure sphérique de la cycloïde, au point considéré.

2). Considérons encore, avec Bernoulli et Clairaut, *l'épicycloïde engendrée par un point d'un grand cercle de la sphère roulant sur un petit cercle fixe.*

Le lieu des intersections successives du grand cercle mobile est ici, abstraction faite du petit cercle directeur, un petit cercle symétrique du premier par rapport au centre de la sphère; et, comme le grand cercle mobile représente, dans l'une quelconque de ses positions, le grand cercle normal à l'épicycloïde ou le grand cercle tangent à sa développée, on voit que cette développée est un petit cercle de la sphère : et l'épicycloïde elle-même, d'après un théorème démontré, est une *hélice sphérique* dont l'*axe* est perpendiculaire au plan du petit cercle directeur, c'est-à-dire une courbe *rectifiable*, comme toutes les hélices. On retrouve ainsi, mais d'une manière intuitive, et en donnant un *nom* à la courbe, le seul cas, déjà rencontré par Bernoulli et Clairaut, où une épicycloïde sphérique soit rectifiable (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1732).

3). Problème. *Trouver sur la sphère la ligne dont le rayon de courbure sphérique est double de l'arc normal terminé à un grand cercle fixe.*

Regardant, à cet effet, la courbe cherchée comme une roulette décrite par un point a invariablement lié à une courbe, de nature inconnue, et qui roulerait sur le grand cercle fixe dont il s'agit, nous ferons dans la formule (B)

$$r_g = \infty, \quad \theta = 2\rho, \quad \theta - \rho = \rho;$$

et il viendra

$$\frac{\sin 2\rho}{\sin \rho} = \frac{1}{r'_g} \cdot \frac{\sin \rho}{\sin V} = \frac{1}{r'_g} \cdot \frac{\sin^2 \rho}{\sin p}, \quad \text{d'où} \quad r'_g = \frac{\sin^2 \rho}{2\cos\rho . \sin p},$$

dont la comparaison avec la formule générale $r'_g = \dfrac{\sin\rho\, d\rho}{d.\sin p}$ fournit enfin l'équation différentielle de la courbe auxiliaire cherchée,

$$\frac{\sin\rho . d\rho}{d.\sin p} = \frac{\sin^2\rho}{2\cos\rho\sin p}, \quad \text{ou} \quad \frac{2\cos\rho . d\rho}{\sin\rho} = \frac{d.\sin p}{\sin p},$$

d'où

$$\sin^2\rho = C\sin p,$$

ou

$$(x_1) \qquad \sin\rho = C\sin V.$$

Si l'on rétablit dans cette formule l'indétermination de l'unité de longueur, et si l'on suppose ensuite que le rayon de la sphère augmente indéfiniment, elle devient à la limite $\rho = C'\sin V$ et représente une circonférence passant par l'origine des rayons vecteurs. La courbe correspondante sur la sphère est beaucoup moins simple, et son équation en ρ et ω ne peut être obtenue en termes finis que dans le cas où la constante C est égale à l'unité, auquel cas on trouve

$$e^{\omega}\left(\tang\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right)^{\pm 1} = C'.$$

4). Problème de Cardan sur la sphère. *Trouver la ligne sphérique qui en roulant sur un petit cercle donné engendre, par un de ses points, ou par un point qui lui est lié invariablement, un grand cercle de la sphère.*

Si on modifie la figure sphérique déjà employée, de manière que les lignes sphériques fixe et mobile soient dans les mêmes relations de position que les deux cercles du théorème de Cardan, on aura l'équation

$$\frac{\sin\theta}{\sin(\theta - \rho)} = \left(\frac{1}{r'_g} - \frac{1}{r_g}\right)\frac{\sin\rho}{\sin V};$$

Faisant dans cette équation $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta - \rho = \frac{\pi}{2} - \rho$, et résolvant par rapport à $\frac{1}{r'_g}$, il vient

$$\frac{1}{r'_g} = \frac{1}{r_g} + \frac{\sin V}{\sin\rho.\cos\rho} = \frac{1}{r_g} + \frac{\sin p}{\sin^2\rho\cos\rho},$$

r_g désignant le rayon de courbure géodésique du cercle fixe, r'_g la grandeur analogue pour la ligne mobile cherchée; et ρ et p les coordonnées, déjà employées, d'un point quelconque de cette ligne, prises par rapport au point décrivant, considéré comme origine. Si l'on remplace enfin dans la dernière formule $\frac{1}{r'_g}$ par $\frac{d.\sin p}{\sin\rho.d\rho}$, on obtient cette équation différentielle de la courbe cherchée

$$\frac{d.\sin p}{\sin\rho.d\rho} - \frac{\sin p}{\sin^2\rho.\cos\rho} = \frac{1}{r_g},$$

que l'on peut écrire

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x(1-x^2)} = \frac{-1}{r_g};$$

en posant

$$\sin p = y, \quad \cos\rho = x.$$

Or, cette dernière équation étant *linéaire*, on trouve en l'intégrant

$$y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\left\{\frac{\sqrt{1-x^2}}{r_g} + C\right\};$$

et l'on en déduit cette *première* équation de la courbe cherchée

$$(x_3) \qquad \sin p = \frac{\sin\rho\ \tang\rho}{r_g} + C\tang\rho.$$

Dans le cas où la sphère se transforme en un plan, on a

$$p = \frac{\rho^2}{r} + C\rho;$$

et, en supposant nulle la constante C,

$$p = \frac{\rho^2}{r},$$

qui représente un cercle décrit sur l'un des rayons r du cercle fixe comme diamètre. Il en résulte que le théorème de Cardan renferme seulement une solution particulière du problème général.

Supposant pareillement nulle la constante C de l'équation (x_3) relative à la sphère, il vient

$$\sin^2 V_r = \frac{\sin^2\rho}{r_g^2\cos^2\rho}, \quad \frac{\sin^2\rho}{\sin^2\rho + \rho'^2} = \frac{\sin^2\rho}{r_g^2\cos^2\rho}, \quad \rho'^2 = r_g^2\cos^2\rho - \sin^2\rho;$$

ou

$$(x'_3) \qquad d\omega = \pm \frac{d\rho}{\sqrt{r_g^2\cos^2\rho - \sin^2\rho}},$$

dont l'intégration ne peut s'effectuer algébriquement.

Si l'on suppose que la base de la roulette soit un grand cercle, ou, si l'on pose $r_g = \infty$ dans la formule (x_3), elle devient

$$(x''_3) \qquad \sin p = C \operatorname{tang} \rho.$$

Si la constante C est inférieure à l'unité, cette équation représente la développée sphérique d'une loxodromie [*voir* page 44, formule (f')]. Et la courbe qu'elle représente, dans le cas le plus général, se transforme en une spirale logarithmique quand le rayon de la sphère augmente indéfiniment.

5). L'élégante méthode à l'aide de laquelle M. Bresse a pu résoudre d'une manière complète le problème de la construction du rayon de courbure, pour une classe très-étendue de courbes mécaniques planes, repose, abstraction faite de toutes considérations de cinématique, sur ces deux théorèmes de géométrie :

Dans le mouvement d'une figure plane, et à une époque quelconque de son mouvement,

1°. *Les centres de courbure des lignes enveloppées par les diverses droites de la figure mobile, aux points où ces droites les touchent actuellement, sont distribués sur une première circonférence, passant par le centre instantané actuel de rotation, et tangente à la ligne décrite par ce centre;*

2°. *Les points de la figure mobile dont les trajectoires ont actuellement un rayon de courbure infini, sont également distribués sur une seconde circonférence, symétrique de la première, par rapport au centre instantané de rotation.*

Le mouvement d'une figure sphérique sur la sphère à laquelle elle appartient, présente-t-il des propriétés analogues?

Cherchons d'abord, pour répondre à cette question, *le lieu des points de la figure mobile qui décrivent actuellement des arcs de grand cercle, ou dont les trajectoires ont actuellement un rayon de courbure géodésique infini.* Il suffit pour cela de faire

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \sin\theta = 1 \quad \text{et} \quad \sin(\theta - \rho) = \cos\rho,$$

dans la formule (B); et l'on trouve ainsi, en remplaçant V par ω,

$$(x_1) \qquad \sin\rho\cos\rho = C\sin\omega, \quad C = \frac{1}{\frac{1}{r_g} \pm \frac{1}{r'_g}} = \frac{ds}{d\omega},$$

pour équation de la courbe cherchée, qui n'est pas un cercle comme dans le plan, mais bien une courbe du troisième degré représentée, suivant le système de coordonnées de Gudermann, par cette autre équation

$$(x'_1) \qquad (\text{tang}^2\xi + \text{tang}^2\eta)(1 - C\,\text{tang}\,\eta) - C\,\text{tang}\,\eta = 0.$$

En second lieu, il est facile de voir que sur la sphère il n'existe plus, comme dans le plan, une courbe spéciale lieu géométrique des centres de courbure sphérique des lignes enveloppées par les divers grands cercles de la figure mobile; et que ces centres peuvent couvrir la sphère tout entière : le centre de courbure de la ligne enveloppée par un grand cercle quelconque coïncide, en effet, avec le centre de courbure de la trajectoire décrite par le pôle de ce grand cercle; et les centres de courbure des diverses enveloppes sont, par suite, disséminés d'une manière quelconque sur la sphère, exactement comme les centres de courbure des trajectoires correspondantes.

Néanmoins, si l'on sait qu'un grand cercle de la figure mobile tourne autour d'un point fixe, son pôle décrivant un grand cercle, on connaîtra un point de la courbe

$$\sin \rho \cos \rho = C \sin \omega,$$

qui est complétement déterminée par la connaissance de trois de ses points, et que l'on pourra utiliser, quoique avec beaucoup moins d'avantage que la circonférence qui lui correspond dans le plan, pour la construction du centre de courbure sphérique de la trajectoire d'un point quelconque de la figure mobile.

Remarque I. Si on pose, dans la formule (B) (*voir* page 52),

$$\theta - \rho = \frac{\pi}{2},$$

d'où

$$\sin(\theta - \rho) = 1 \quad \text{et} \quad \sin \theta = \cos \rho,$$

on trouve l'équation

$$\sin \omega = \left(\frac{1}{r_g} \pm \frac{1}{r_g}\right) \operatorname{tang} \rho :$$

elle représente une ellipse sphérique, *capable d'un angle droit*, et dont l'*axe hypoténuse* est normal à la ligne des centres instantanés de rotation; et cette ellipse d'ailleurs est *le lieu géométrique des points de la figure mobile dont les centres de courbure des trajectoires sont situés à* 90 *degrés du centre instantané de rotation*. La courbe actuelle présente donc des analogies géométriques plus intimes avec la circonférence, lieu des points sans accélération centripète, employée par M. Bresse; et se transforme aussi en cette circonférence, quand le rayon de la sphère augmente indéfiniment.

Remarque II. Les points de la figure mobile situés sur l'ellipse sphérique, capable d'un angle droit, et ayant pour axe hypoténuse le rayon de courbure sphérique de la ligne mobile, *ont leurs centres de courbure sphérique distribués sur une seconde ellipse, de même nature que la précédente, et ayant pour axe le rayon de courbure sphérique de la* ligne

fixe : en appelant *ligne fixe* la courbe des centres instantanés de rotation, et *ligne mobile* la courbe qui, en roulant sur la première, produirait le mouvement considéré de la figure primitive.

IV.

Sur divers usages du principe de dualité qui résulte, sur la sphère, de la théorie des figures supplémentaires.

32. Le principe de dualité qui résulte, dans la géométrie de la sphère, des propriétés des figures supplémentaires, est connu depuis longtemps ; et on en a tiré déjà un parti considérable pour l'étude de divers lieux géométriques, et de certaines courbes enveloppes.

Il nous paraît toutefois que l'on n'a guère considéré jusqu'ici dans ce principe que l'un des aspects qu'il présente, et d'après lequel, à chaque horizon découvert dans une première exploration géométrique, correspond un second horizon, aperçu seulement par les yeux de l'esprit, et n'ayant exigé aucun effort, aucun déplacement nouveaux. En d'autres termes, on a vu surtout dans ce principe un précieux moyen de multiplication des vérités déjà acquises, sans apercevoir peut-être, d'une manière assez nette, qu'il présente aussi un mode remarquable de transformation à l'aide duquel un problème de géométrie infinitésimale se ramène, dans un grand nombre de cas, à un problème de géométrie finie : la méthode infinitésimale intervenant seulement, et une fois pour toutes, dans l'établissement des liaisons existant entre deux lignes supplémentaires : les problèmes suivants nous offriront divers exemples de cette transformation.

33. Considérant une courbe quelconque mm', l'arc tangent en un point m de cette courbe, et les arcs fp, $f'p'$,... menés des foyers donnés f, f'... perpendiculairement au premier ; les arcs pf et $p'f'$, prolongés, se coupent en un point M qui est le pôle de l'arc tangent pmp' et qui appartient à la courbe MM', supplémentaire de la proposée : les points m et M étant d'ailleurs

deux points *correspondants* de ces courbes. Si donc, posant

$$\widehat{fp} = p, \quad \widehat{f'p'} = p', \ldots,$$

on cherche à définir la ligne sphérique dont l'arc tangent en chaque point possède la propriété exprimée par l'équation

$$\varphi(p, p', \ldots) = \text{constante},$$

la ligne MM', supplémentaire de la ligne cherchée, sera définie par l'équation

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \rho, \frac{\pi}{2} - \rho', \ldots\right) = \text{constante},$$

ρ, ρ',... designant les rayons vecteurs fM, $f'M$,... complémentaires des arcs p, p',....

a). Théorème I. *m, m',... désignant des coefficients constants, la courbe représentée par l'équation*

$$(1) \qquad m.\sin p + m'.\sin p' + \ldots = \text{constante},$$

est un cercle. La courbe supplémentaire est, en effet, définie par l'équation

$$(1') \qquad m.\cos\rho + m'.\cos\rho' + \ldots = \text{constante},$$

qui représente un cercle, comme on l'a vu précédemment (*voir* page 26, n° 3).

b). Théorème II. *La courbe*

$$(2) \qquad \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p'}{2}\right)} = \text{constante}$$

est un cercle.

La courbe supplémentaire est, en effet, définie par l'équation

$$(2') \qquad \frac{\sin\frac{\rho}{2}}{\sin\frac{\rho'}{2}} = \text{constante},$$

qui exprime que le rapport des distances *rectilignes* d'un point

quelconque de la courbe aux deux foyers f, f' est constant : cette courbe est donc un petit cercle, intersection de la sphère proposée et d'une seconde sphère, dont le centre est quelque part sur la droite ff'.

c). Théorème III. *La courbe*

$$\frac{\cos p}{\cos p'} = \text{constante} \tag{3}$$

est une ellipse sphérique, enveloppe d'un quadrant dont les extrémités glissent sur deux grands cercles donnés : la courbe supplémentaire

$$\frac{\sin \rho}{\sin \rho'} = \text{constante} \tag{3'}$$

est, en effet, une ellipse sphérique, capable d'un angle droit (Vannson, *Nouvelles Annales de Mathématiques*; 1858, page 253).

d). Théorème IV. *La courbe*

$$p + p' = \text{constante} \tag{4}$$

est une ellipse sphérique : la courbe supplémentaire est en effet représentée par l'équation

$$\rho + \rho' = \text{constante}, \tag{4'}$$

qui est l'une des définitions de l'ellipse sphérique; et l'on sait que l'ellipse a pour supplémentaire une autre ellipse.

e). Théorème V. *La courbe*

$$\sin p . \sin p' = \text{constante} \tag{5}$$

est une ellipse, ayant pour foyers les points f, f'.

Prenant, en effet, comme dans le n° *c*), le milieu de l'arc $ff' = 2c$ pour origine des coordonnées polaires r et ω, on a pour la courbe supplémentaire,

$$\cos^2 r \cos^2 c - \sin^2 r \sin^2 c \cos^2 \omega = k^2,$$

$$\cos^2 c - \sin^2 c . \tang^2 r \cos^2 \omega = k^2 (1 + \tang^2 r);$$

ou, en remplaçant $\tang^2 r \cos^2 \omega$ et $\tang^2 r$ par $\tang^2 \xi$ et $\tang^2 \xi + \tang^2 \eta$ respectivement,

$$(k^2 + \sin^2 c) \tang^2 \xi + k^2 \tang^2 \eta = \cos^2 c - k^2 : \tag{5'}$$

Équation d'une courbe du second degré ou d'une ellipse sphérique, d'où l'on déduirait aisément l'équation de l'ellipse primitive, de manière à constater que cette dernière a précisément pour foyers les points f et f'.

Observation. On pourrait aussi étudier directement plusieurs des courbes précédentes, en employant d'une manière convenable les formules

$$r_g = \frac{\sin \rho . d\rho}{d . \sin p}, \quad \cos V = \pm \frac{d\rho}{ds}.$$

Reprenons, par exemple, la courbe

$$(s) \qquad \sin p \sin p' = \text{constante},$$

et désignons par ρ et ρ' les rayons vecteurs qui joignent un point quelconque de cette courbe aux deux points f et f'. On a cette double expression du rayon de courbure géodésique de la ligne cherchée,

$$r_g = \frac{\sin \rho . d\rho}{d . \sin p} = \frac{\sin \rho' . d\rho'}{d . \sin p'},$$

d'où

$$d . \sin p = \frac{\sin \rho . d\rho}{r_g} \quad \text{et} \quad d . \sin p' = \frac{\sin \rho' . d\rho'}{r_g};$$

et si l'on porte ces valeurs dans l'équation différentielle

$$\frac{d . \sin p}{\sin p} + \frac{d . \sin p'}{\sin p'} = 0$$

déduite de l'équation (5), on trouve, successivement,

$$\frac{\sin \rho . d\rho}{\sin p} + \frac{\sin \rho' . d\rho'}{\sin p'} = 0, \qquad \frac{d\rho}{\sin V} + \frac{d\rho'}{\sin V'} = 0,$$

$$\frac{ds . \cos V}{\sin V} \pm \frac{ds . \cos V'}{\sin V'} = 0, \qquad \tang V = \pm \tang V' :$$

on a donc aussi

$$\cos V = \pm \cos V',$$

ou

$$\frac{d\rho}{ds} \pm \frac{d\rho'}{ds} = 0, \quad \text{ou} \quad d\rho \pm d\rho' = 0;$$

d'où enfin

$$\rho \pm \rho' = \text{constante},$$

équation d'une ellipse sphérique.

34. *De la ligne sphérique ayant pour podaire un grand ou un petit cercle.*

La podaire d'une ligne sphérique quelconque, relativement à un point o pris arbitrairement sur la surface de la sphère, et la supplémentaire de cette même ligne, sont deux courbes à rayons vecteurs complémentaires, l'origine de ces rayons étant au point o : il en résulte, en prenant le centre de la sphère pour point de vue, et le plan tangent en o pour plan du tableau, que les perspectives de ces deux courbes forment deux lignes planes à rayons vecteurs réciproques, ou simplement deux lignes réciproques par rapport à l'origine o; et ces relations entre la podaire et la supplémentaire d'une ligne sphérique permettent de résoudre d'une manière très-simple les problèmes suivants :

a). Problème I. *La podaire étant un grand cercle, trouver la ligne primitive.*

Solution. La perspective de la ligne cherchée est une ligne plane dont la podaire relative au point o est une ligne droite; c'est donc une parabole ayant le point o pour foyer : et la ligne cherchée elle-même est une conique sphérique ayant l'un de ses foyers au point o. D'ailleurs si on veut la définir avec plus de précision, il suffit de remarquer que la podaire et la supplémentaire de la ligne cherchée se projettent suivant deux lignes réciproques par rapport à l'origine o. Or, la projection de la première étant, par hypothèse, une ligne droite, la projection de la seconde est une circonférence passant par l'origine; et la supplémentaire de la ligne cherchée est l'ellipse sphérique, capable d'un angle droit, dont le point donné o et le pôle du grand cercle podaire sont les extrémités de l'axe hypoténuse. La ligne cherchée est donc enfin *la conique sphérique, enveloppe d'un quadrant dont les extrémités glis-*

sent sur deux grands cercles donnés, et son équation est

$$\tang x . \tang y = -\frac{1}{4\cos\theta},$$

les deux cercles directeurs étant pris pour axes.

b). Problème II. *La podaire étant un petit cercle, trouver la ligne primitive.*

Les projections, sur le plan tangent à l'origine *o*, de la podaire et de la supplémentaire de la courbe cherchée, sont, la première une conique plane, la seconde la réciproque de cette conique, ou une courbe plane du quatrième degré. Il en résulte que la supplémentaire de la ligne sphérique cherchée est également du quatrième degré, la ligne cherchée étant dès lors d'un degré supérieur au second.

35. La substitution de la courbe supplémentaire à la courbe primitive ne peut être d'aucune utilité dans la recherche de la développée d'une ligne sphérique, car deux lignes supplémentaires ont même développée sphérique. Mais on peut alors substituer à la recherche de la développée celle de la courbe supplémentaire de cette développée : et il est facile de voir que cette dernière recherche constitue un problème de géométrie finie, ou n'exigeant du moins que la solution du problème des tangentes.

Que l'on mène en effet par chaque point d'une ligne sphérique un arc de grand cercle tangent à cette ligne, et que l'on prenne sur cet arc à partir du point de contact une longueur égale à un quadrant. Entre la ligne primitive et la courbe décrite par l'extrémité de cet arc, que nous avons déjà appelée l'*indicatrice* de cette ligne, existeront les relations suivantes :

1°. L'indicatrice peut être considérée comme le lieu des extrémités des rayons de la sphère parallèles aux tangentes *rectilignes* de la ligne primitive;

2°. L'indicatrice et la développée de la ligne primitive sont deux courbes supplémentaires.

La recherche de l'hélice sphérique nous a fourni une première application de ces relations : nous allons voir qu'on en déduit, très-simplement aussi, l'équation de la développée de l'ellipse sphérique, déjà obtenue par Gudermann (*Sphärik*, page 92).

Soit (x, y) un point quelconque d'une ellipse sphérique

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

rapportée à son centre et à ses axes; a et b, x et y désignant les tangentes trigonométriques des demi-axes de la courbe et des coordonnées axiales du point considéré. Le point correspondant (x_1, y_1) de l'indicatrice étant situé sur l'arc tangent à l'ellipse en a, et sur le grand cercle ayant pour pôle le point a (x, y); on a, pour déterminer les coordonnées x_1, y_1 de ce point, les équations

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1, \qquad xx_1 + yy_1 = -1;$$

d'où, en posant

$$a^2 - b^2 = c^2, \quad a' = a(1 + b^2), \quad b' = b(1 + a^2),$$

$$(a) \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{-a'}{c^2 x_1}, \\ \dfrac{y}{b} = \dfrac{-b'}{c^2 y_1}. \end{cases}$$

On en déduit d'abord cette équation de l'indicatrice

$$(2) \qquad \frac{a'^2}{c^4 x_1^2} + \frac{b'^2}{c^4 y_1^2} = 1,$$

et son grand cercle tangent est représenté, toutes simplifications faites, par l'équation

$$-X \cdot \frac{a'^2}{c^4 x^4} - Y \cdot \frac{b'^2}{c^4 y_1^3} + 1 = 0.$$

Or, ce grand cercle ayant pour pôle le point correspondant (ξ, η) de la développée, son équation peut être identifiée à

5

celle du grand cercle polaire de ce point

$$X.\xi + Y.\eta + 1 = 0;$$

et il résulte d'abord de cette identification,

$$\xi = -\frac{a'^2}{c^4 x_1^3}, \quad \eta = -\frac{b'^2}{c^4 y_1^3};$$

d'où

$$(b) \quad \frac{1}{x_1} = \left(-\frac{c^4 \xi}{a'^2}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad (b') \quad \frac{1}{y_1} = \left(-\frac{c^4 \eta}{b'^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Et la substitution de ces valeurs dans l'équation (1) donne enfin

$$(3) \quad \left(\frac{a'\xi}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b'\eta}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad a' = a(1 + b^2), \quad b' = b(1 + b^2);$$

pour équation de la développée de l'ellipse sphérique. La courbe (3) a même développée sphérique que l'indicatrice (2). Mais, tandis que cette dernière est seulement du quatrième degré, la développée de l'ellipse est du sixième.

V.

De quelques propriétés nouvelles des coniques sphériques (*).

I.

36. Si l'on rapporte les différents points M d'une sphère à deux grands cercles fixes OX, OY, et que, prenant sur chacun d'eux, à partir de l'origine O, les arcs OX, OY égaux à un quadrant, on mène les arcs $\widehat{YM}$, $\widehat{XM}$ coupant respectivement OX, OY en P, Q, les arcs OP $= \xi$, OQ $= \eta$ seront les *coordonnées*

(*) *Toutes* les propriétés qui suivent ont été communiquées à la Société Philomathique, le 22 mai 1858, et se trouvent reproduites dans son Bulletin. La livraison de juillet 1858 des *Nouvelles Annales de Mathématiques* renferme, sur le même sujet, un article de M. Vannson, qui est parvenu, de son côté, et par une voie toute différente de la nôtre, à quelques-unes de nos propositions.

axiales du point M; et les tangentes trigonométriques de ces arcs

$$x = \tang \xi, \quad y = \tang \eta,$$

seront les coordonnées sphériques de ce point, suivant la définition de Gudermann (*Sphärik*, page 1) : une ligne sphérique MM′ étant dite, en outre, du $n^{ième}$ degré, quand les coordonnées sphériques de chacun de ses points satisfont à une même équation $f(x,y) = 0$, algébrique et du degré n.

37. Si prenant le centre de la sphère pour centre de projection, le plan tangent à l'origine O des axes curvilignes OX, OY pour plan de projection, on projette centralement le point M en m; et que l'on rapporte le point projeté m aux axes rectilignes Ox, Oy respectivement tangents aux axes curvilignes précédents OX, OY : on reconnaît sans peine que les coordonnées rectilignes du point m sont respectivement égales aux coordonnées sphériques de même nom du point M; d'où cette conséquence intuitive qu'une ligne sphérique du second ou du $n^{ième}$ degré appartient à un cône du second ou du $n^{ième}$ degré: concentrique à la sphère et ayant pour base sur le plan tangent à l'origine O une courbe plane du second ou du $n^{ième}$ degré; une ligne sphérique du premier degré étant un grand cercle.

38. A une conique plane $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$, située dans le plan tangent en O, ayant pour grand et petit axes $2a$ et $2b$ et dont le centre est en O, correspond une conique sphérique représentée par la même équation, ayant pour centre le point O, et dont les axes 2α et 2β sont définis par les équations

$$\tang \alpha = a, \quad \tang \beta = b.$$

On sait d'ailleurs que cette courbe peut être engendrée par le mouvement d'un point M dont la somme des distances sphériques à deux foyers fixes F, F′ demeure constante et égale au grand axe 2α. Les deux foyers étant situés sur le grand axe, de part et d'autre du centre, et à une distance γ de ce dernier,

définie par l'équation

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma.$$

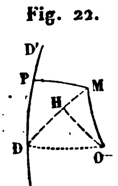
39. Une conique sphérique quelconque a toujours trois centres, un centre intérieur et deux centres extérieurs; son équation peut toujours, par un changement d'axes, être ramenée à la forme précédente; et, par suite, toute conique sphérique admet au moins un système de deux foyers. Toutes ces propriétés, et beaucoup d'autres que, pour l'objet que nous avons en vue, il serait inutile de rappeler, sont aujourd'hui fort connues, grâce aux travaux de MM. Chasles, Gudermann et Borgnet. La méthode particulièrement élégante suivie par l'auteur de l'*Essai de Géométrie analytique sphérique* (Tours, 1847), consiste essentiellement à substituer à une ligne sphérique rapportée à un point O de la sphère, la projection centrale, ou perspective, de cette ligne sur le plan tangent en ce point; le centre de projection, ou point de vue, étant au centre de la sphère : ce mode de *transformation* possédant d'ailleurs plusieurs propriétés remarquables. Les plus importantes, et en même temps les plus intuitives, résident dans l'égalité déjà mentionnée des coordonnées sphériques et rectilignes de deux *points correspondants* rapportés à des axes passant par l'origine; dans la *conservation* des lignes géodésiques et dans celle des pôles et polaires relatifs à une courbe du second degré : ce sont du moins les seules qui aient été employées par M. Borgnet. Il en existe cependant quelques autres, un peu plus cachées, que nous allons exposer; et qui nous ont conduit à plusieurs propositions nouvelles, paraissant clore la série des analogies déjà constatées entre les coniques planes et sphériques.

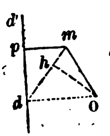
II'.

40. Lemme I. *A deux grands cercles de la figure sphérique, perpendiculaires entre eux et dont l'un passe par l'origine* O, *correspondent, dans la projection centrale sur le plan tangent en* O, *deux droites perpendiculaires entre elles.*

41. LEMME II. *Le rapport des sinus des distances sphériques d'un point* M *à l'origine* O *et à un grand cercle fixe* DD', *est égal au rapport des distances de sa projection* m *à la même origine* O *et à la droite correspondante* dd', *multiplié par un coefficient constant;* la valeur de ce coefficient étant indépendante de la position du point M.

Fig. 22.





Abaissons, en effet, $\widehat{OD}$, $\overline{Od}$ perpendiculaires sur l'arc DD' et sur la droite dd', menons $\widehat{MD}$, $\overline{md}$; et projetons le point O en H et h sur $\widehat{MD}$ et $\overline{md}$. On aura

$$\frac{\sin MO}{\sin MP} = \frac{\operatorname{tang} ODM}{\sin DOM}, \qquad \frac{mO}{mp} = \frac{\operatorname{tang} O dm}{\sin dOm} = \frac{\operatorname{tang} O dm}{\sin DOM};$$

$$\frac{\sin MO}{\sin MP} : \frac{mO}{mp} = \frac{\operatorname{tang} ODH}{\operatorname{tang} O dh} = \frac{\operatorname{tang} ODH}{\cot dOh} = \operatorname{tang} ODH . \operatorname{tang} DOH$$

$$= \frac{1}{\cos OD} = \text{constante.} \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

42. LEMME III. *Si un point* O *est tel que le grand cercle joignant ce point à un point quelconque* D' *de sa polaire* $\widehat{DD'}$ *relative à une conique sphérique* C *soit perpendiculaire à la polaire du point* D', *prise par rapport à la même conique; le point* O *coïncidera nécessairement avec l'un des deux foyers de la conique considérée.*

On reconnaît d'abord que le point O est situé sur l'un des axes, CA par exemple, de la conique considérée; sa polaire relative DD' étant dès lors perpendiculaire à cet axe : soient posés

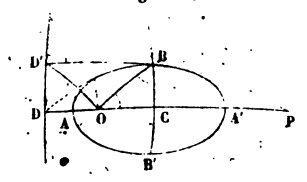
$$\widehat{CA} = \alpha,\ \widehat{CB} = \beta;\ \widehat{CO} = \gamma',\ \widehat{CD} = \delta',$$

γ' et δ' étant liés par la relation

$$(a) \qquad \operatorname{tang} \delta' = \frac{\operatorname{tang}^2 \alpha}{\operatorname{tang} \gamma'}.$$

Si l'on mène l'arc tangent au sommet B de la courbe, rencontrant en D′ la polaire du point O, et que l'on mène $\widehat{OB}$, $\widehat{OD'}$, ces deux arcs seront perpendiculaires entre eux, et les angles BOC, D′OD seront complémentaires. D'ailleurs l'arc D′B, prolongé, allant couper l'axe AA′ en P, ce point P est situé à 90 degrés du centre C, et l'angle en P du triangle PDD′ est mesuré par l'arc BC $= \beta$.

Fig. 23.



Cela posé, dans les triangles rectangles OCB, ODD′, PDD′ les *sinus* de $\widehat{OC}$, $\widehat{OD}$, $\widehat{PD}$ sont respectivement égaux aux produits des *cotangentes* des *éléments* adjacents; et l'on a, après avoir multiplié membre à membre les deux premières des trois égalités résultantes, et en conservant la troisième,

$$\sin\gamma'.\sin(\delta'-\gamma') = \operatorname{tang} DD'.\operatorname{tang} BC = \operatorname{tang} DD'.\operatorname{tang}\beta,$$

$$\sin PD \quad \text{ou} \quad \cos\delta' = \operatorname{tang} DD'.\cot\hat{P} = \operatorname{tang} DD' : \cot\beta :$$

d'où, en divisant membre à membre,

$$\sin\gamma'.\frac{\sin(\delta'-\gamma')}{\cos\delta'} = \operatorname{tang}^2\beta,$$

ou

$$\sin\gamma'(\operatorname{tang}\delta'.\cos\gamma' - \sin\gamma') = \operatorname{tang}^2\beta.$$

Enfin, la substitution de sa valeur (a) à $\operatorname{tang}\delta'$, et quelques transformations conduisent à la relation

$$(x) \qquad \cos\alpha = \cos\beta.\cos\gamma'$$

qui démontre la coïncidence du point O avec l'un des foyers.

43. Lemme IV. *Dans toute conique sphérique, le rapport des sinus des distances sphériques, au foyer* O *et à sa polaire relative* DD′, *de l'une des extrémités* A *ou* A′ *de l'axe focal, est égal au rapport analogue par l'autre extrémité.*

L'égalité $\frac{\sin AO}{\sin AD} = \frac{\sin A'O}{\sin A'D}$ exprime en effet que les rayons de la sphère qui aboutissent aux sommets A et A′, au foyer O et

au pied D de sa polaire relative sur l'axe, forment un faisceau harmonique : ou que les traces de ces rayons sur le plan tangent en O déterminent un système de quatre points conjugués harmoniquement. Or cette propriété, ayant lieu quelle que soit la position du point O sur l'axe AA′, a lieu, en particulier, pour chacun des foyers.

III′.

44. Problème. *Trouver sur la sphère le lieu géométrique des points M dont les sinus des distances sphériques à un point O et à un grand cercle fixes, sont dans un rapport constant.*

Solution. La projection *mm′* de la courbe cherchée sur le plan tangent en O pourra être considérée, d'après le lemme II, comme le lieu des points *m* dont les distances au point O et à la droite fixe *dd′* (projection du grand cercle DD′) sont dans un rapport constant : cette projection est donc une conique plane, et la ligne primitive est une conique sphérique. D'ailleurs, dans la projection, la *directrice dd′* est la polaire du foyer O, et la droite joignant celui-ci à un point quelconque *d′* de sa polaire est perpendiculaire à la polaire de ce point *d′*. Les mêmes dépendances existent donc dans la figure sphérique entre le grand cercle directeur DD′ et le point O; et par suite, d'après le lemme III, le point O est l'un des foyers de la conique sphérique, le grand cercle DD′ étant de même la polaire du foyer relative à la conique. On a donc ce théorème :

Théorème I. *Le lieu des points de la sphère dont les sinus des distances sphériques à un point et à un grand cercle fixes sont dans un rapport constant, est une conique sphérique dont l'un des foyers est au point fixe, et pour laquelle la polaire de ce dernier coïncide avec le grand cercle directeur.*

45. Théorème II. *Réciproquement, toute conique sphérique* C *présente cette propriété que les sinus des distances sphériques d'un point quelconque* M *de la courbe à l'un des foyers* O, *et au grand cercle* DD′ *qui est la polaire de ce foyer, sont dans un rapport constant.*

Démonstration. Considérons, en effet, indépendamment de la conique C, une seconde conique C′ qui serait le lieu des points M′ dont les sinus des distances sphériques au point O et au grand cercle DD′ sont dans un rapport constant, *égal au rapport analogue pour l'un des sommets* A ou A′, *de l'axe focal* de la conique C. Cette conique C′ aurait en commun avec la conique proposée le foyer O, d'après le théorème précédent, et les *deux* sommets A, A′ de l'axe focal, d'après le lemme IV ; mais ces conditions entraînent évidemment la coïncidence des coniques C, C′; et le théorème est démontré.

Corollaire I. *La perspective d'une conique sphérique sur le plan tangent en l'un de ses foyers a même foyer que cette conique, et sa directrice est la perspective du grand cercle directeur de la conique sphérique : et réciproquement.*

Corollaire II. *L'équation d'une conique sphérique, rapportée à l'un de ses foyers, peut prendre l'une quelconque des formes suivantes,*

$$\operatorname{tang} \rho = \frac{p}{1 - e \cos \omega},$$

$$\operatorname{tang} \rho = m \operatorname{tang} \xi + n \operatorname{tang} \eta + p = mx + ny + p.$$

Réciproquement, *toute équation de l'une de ces formes représente une conique sphérique dont l'un des foyers est à l'origine; le grand cercle directeur relatif au foyer origine étant représenté par l'équation*

$$m \operatorname{tang} \xi + n \operatorname{tang} \eta + p = 0, \quad \text{ou} \quad mx + ny + p = 0.$$

La proposition *directe* avait seule été établie par Gudermann. (*Sphärik*, pages 78-80.)

Remarque. Le théorème I peut être établi directement, au moins quant à la nature de la courbe décrite par le point variable M, de la manière suivante. La relation donnée

Fig. 24.

$$\frac{\sin \mathrm{MO}}{\sin \mathrm{MP}} = k = \text{constante}$$

peut être remplacée par celle-ci

$$\frac{\sin \text{MO}}{\cos \text{M}p} = k :$$

p désignant le pôle du grand cercle directeur DD'. Or, en posant $\widehat{\text{OM}} = \rho$, $\widehat{\text{MO}p} = \omega$, $\widehat{\text{O}p} = \gamma'$, on a

$$\cos \widehat{\text{M}p} = \cos \rho \cos \gamma' + \sin \rho \,.\, \sin \gamma' \,.\, \cos \omega ;$$

et l'on en déduit successivement

$$\sin \rho = k \cos \gamma' \cos \rho + k \sin \gamma' \sin \rho \,.\, \cos \omega ,$$

$$\operatorname{tang} \rho = k \cos \gamma' + k \sin \gamma' \,.\, \operatorname{tang} \rho \cos \omega ;$$

$$\operatorname{tang} \rho = k \cos \gamma' + k \sin \gamma' \operatorname{tang} \xi = m + n \operatorname{tang} \xi :$$

équation d'une conique sphérique.

46. *De la parabole sphérique*. La nature du lieu des points M de la sphère, également éloignés d'un point O et d'un grand cercle fixes, peut être obtenue immédiatement en remarquant que la somme des distances sphériques d'un point du lieu au point O et au pôle p du grand cercle fixe est égale à un quadrant. La courbe considérée est donc une conique sphérique dont le point O est un foyer, le second foyer étant le pôle p du cercle directeur, et le grand axe de l'ellipse étant égal à un quadrant : or c'est précisément à cette courbe, dont l'équation peut se ramener à la forme $y^2 = 2px$, qu'on a déjà donné le nom de parabole sphérique ; et cette coïncidence complète la série des analogies que présentent, au point de vue des foyers et des directrices, les coniques planes et sphériques.

47. Théorème III. *Le lieu décrit par le sommet d'un angle droit circonscrit à une parabole sphérique se compose de deux grands cercles : les cercles directeurs relatifs aux deux foyers.*

Démonstration. Les considérations géométriques que l'on emploie pour établir la propriété analogue de la parabole

plane, s'appliquent sans aucune modification à la parabole sphérique.

48. Théorème IV. *Le lieu des projections d'un foyer* O *d'une conique sphérique sur les arcs de grand cercle tangents à la courbe, est, en général, une seconde conique sphérique dont le petit axe est dirigé suivant le grand axe de la proposée; et le point* O *est l'un des pôles des sections circulaires du cône qui la contient : le lieu en question peut d'ailleurs se réduire à un grand cercle, dans un cas particulier déjà examiné* (*voir* page 63); *mais il ne peut jamais être un petit cercle de la sphère.*

Démonstration. La projection du lieu considéré sur le plan tangent au point O est en effet la podaire d'une conique plane par rapport à l'un de ses foyers; et cette podaire est un cercle dans le cas général, une ligne droite dans un cas particulier; et le cône qui renferme ce cercle, dans le cas général, et qui a pour sommet le centre de la sphère, n'est jamais de *révolution.*

Remarque. La podaire d'une conique sphérique, par rapport à un point quelconque O de la sphère, et la supplémentaire de cette conique étant, relativement au même point O, deux lignes à rayons vecteurs complémentaires; leurs projections sur le plan tangent en O seront deux lignes *réciproques.* Donc, *la podaire d'une conique plane*, par *rapport à un point* quelconque *de son plan*, *est la réciproque*, *par rapport au même point*, *d'une seconde conique.*

49. L'application de la théorie des figures supplémentaires aux théorèmes précédents conduirait aisément aux théorèmes corrélatifs, que nous nous dispenserons d'énoncer.

CHAPITRE IV.

DE L'INDICATRICE SPHÉRIQUE.

---

50. *Définition de l'indicatrice sphérique d'une ligne à double courbure.*

Considérons dans l'espace une ligne à double courbure quelconque L, et menons par le centre d'une sphère de rayon 1, des rayons ot, ot_1 parallèles aux tangentes de cette ligne : leurs extrémités t, t_1 formeront sur la surface de la sphère une ligne l que nous appellerons l'*indicatrice sphérique* de la ligne primitive; les points *correspondants* des deux lignes seront d'ailleurs un point quelconque de la ligne primitive, et le point de la ligne sphérique qui est l'extrémité du rayon parallèle à la tangente au premier point.

51. *Relations descriptives entre une ligne et son indicatrice sphérique.*

Une ligne quelconque de l'espace L et son indicatrice l, considérées en des points *correspondants*, présentent les propriétés suivantes : *Le plan du grand cercle tangent à l'indicatrice est parallèle au plan osculateur de la ligne primitive* L ; *la tangente rectiligne de l'indicatrice est parallèle à la normale principale de la ligne* L, *et le rayon de la sphère aboutissant au pôle du cercle osculateur de l'indicatrice est parallèle à la direction limite de la plus courte distance entre deux normales principales consécutives de la ligne* L, *ou à la droite rectifiante*. Ces relations sont à peu près évidentes. Ainsi, le plan tot_1 étant parallèle au plan mené par une tangente fixe de la ligne L, parallèlement à une tangente infiniment voisine, les limites de ces plans, c'est-à-dire... sont parallèles. La tangente de l'indicatrice en t étant située dans le plan du grand cercle tangent en ce point, et se trouvant perpendiculaire dans ce plan au rayon ot, est parallèle à la normale principale de la ligne L qui occupe, dans le plan osculateur et par rapport à la

tangente de cette ligne, une position semblable. Enfin, le rayon de la sphère aboutissant au point d'intersection de deux grands cercles normaux à l'indicatrice, est perpendiculaire à deux tangentes rectilignes de l'indicatrice, ou parallèle à la plus courte distance de deux normales principales consécutives de la ligne primitive : donc la limite de ce rayon ou le rayon de la sphère qui aboutit au centre de courbure sphérique de l'indicatrice, est parallèle à la droite rectifiante. Cette dernière observation conduit à la conséquence que *la développée sphérique de l'indicatrice est elle-même l'indicatrice sphérique de l'arête de rebroussement de la surface rectifiante*, engendrée par les droites de même nom, c'est-à-dire par les intersections successives des plans menés par les tangentes de la ligne primitive, perpendiculairement aux plans osculateurs correspondants.

52. *Relations métriques entre la ligne primitive et son indicatrice.*

L'arc élémentaire $ds = tt_1$ de l'indicatrice pouvant être remplacé par l'arc de grand cercle $\widehat{tt_1}$, et ce dernier mesurant l'angle des rayons ot, ot_1 parallèles à deux tangentes consécutives de la ligne L, on voit d'abord que *l'arc élémentaire* ds *de l'indicatrice mesure l'angle de contingence* E *de la ligne primitive*

$$ds = \mathrm{E}. \tag{16}$$

Il résulte ensuite de la première des relations descriptives énoncées précédemment, que *l'angle de contingence géodésique de l'indicatrice est égal à l'angle de torsion* H *de la ligne primitive*

$$e_g = \mathrm{H}; \tag{17}$$

et de la combinaison de ces relations on déduit

$$r_g = \tang\theta = \frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1}. \tag{18}$$

Cette formule exprime que *le rayon de courbure géodésique de l'indicatrice mesure le rapport de la première à la se-*

conde courbure de la ligne primitive; elle fournit en même temps *la tangente trigonométrique de l'inclinaison, sur le plan osculateur, de la plus courte distance entre deux normales principales consécutives de la ligne primitive.*

Enfin, l'angle ω de deux normales principales consécutives de la ligne primitive est égal à l'angle de contingence de l'indicatrice,

$$(19) \qquad \omega = e;$$

et si l'on appelle E', H' les angles de contingence et de torsion de l'arête de rebroussement de la surface rectifiante, qui a pour indicatrice la développée de la ligne tt_1, on aura (d'après les relations établies à la page 37 entre une ligne sphérique et sa développée)

$$E' = ds' = h = d\theta,$$

ou

$$(20) \qquad E' = d.\text{arc tang}\,\frac{R_2}{R_1};$$

et

$$H' = e'_g = e = \omega,$$

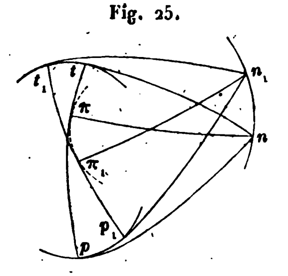
ou

$$(21) \qquad H' = \omega = e.$$

53. *De deux autres lignes sphériques conjuguées à la ligne primitive, et de leurs relations avec l'indicatrice.*

Menons, par le centre de la sphère, deux nouvelles séries de rayons $on, on_1, \ldots$ et $op, op_1, \ldots$ parallèles aux normales principales et aux droites polaires de la ligne primitive: leurs extrémités engendreront deux nouvelles lignes sphériques nn_1 et pp_1, dont nous allons indiquer rapidement les liaisons avec l'indicatrice tt_1.

Fig. 25.



1°. Le plan ton étant parallèle au plan osculateur de la ligne primitive, et l'angle ton étant droit, l'arc tn est égal à un quadrant et coïncide avec l'arc tangent à l'indicatrice en t. Ainsi

la ligne sphérique des normales nn_1 *peut se construire par points en menant des arcs de grand cercle tangents à l'indicatrice en ses différents points, et prenant sur chacun d'eux, à partir du point de contact, un arc égal à un quadrant.*

2°. Le rayon op étant perpendiculaire au plan osculateur de la ligne primitive et, par suite, au plan ton; le point p est le pôle de l'arc de grand cercle tn; donc *la ligne sphérique des droites polaires* pp_1 *peut se construire par points en menant par les divers points de l'indicatrice des arcs de grand cercle normaux à cette courbe, et prenant sur chacun d'eux, à partir de cette dernière, un arc égal à un quadrant.* On voit en outre que *l'indicatrice et la ligne* pp_1 *sont deux lignes supplémentaires ayant même développée sphérique* $\pi\pi_1$, *les rayons de courbure sphérique de ces lignes étant complémentaires;* et que la ligne nn_1 présente un mode de construction identique par rapport aux deux lignes tt_1, pp_1.

3°. Enfin *la ligne* nn_1 *et la ligne* $\pi\pi_1$ (*développée commune des lignes* tt_1, pp_1) *sont deux lignes supplémentaires, ayant même développée; et dont les rayons de courbure sphérique sont complémentaires :* cela résulte de ce que le point n est le pôle de l'arc de grand cercle tp tangent en π à la ligne $\pi\pi_1$.

Observation. La ligne pp_1 pouvant être considérée comme l'indicatrice de l'arête de rebroussement de la surface polaire relative à la ligne primitive L, il résulte des relations précédentes entre les lignes tt_1 et pp_1 que *les angles de contingence et de torsion d'une ligne sont respectivement égaux aux angles de torsion et de contingence de l'arête de rebroussement de la surface polaire, et que les normales principales de ces deux lignes sont parallèles* (*voir* pages 18 et 19).

CHAPITRE V.

DE DIVERS ÉLÉMENTS DIFFÉRENTIELS ET DE DIVERSES GRANDEURS QUE L'ON PEUT AVOIR A CONSIDÉRER EN CHAQUE POINT D'UNE LIGNE A DOUBLE COURBURE QUELCONQUE : FORMULES DIVERSES.

---

54. *Angle ω de deux normales principales consécutives.*

Cet angle étant égal à l'angle de contingence absolue de l'indicatrice sphérique, on a (*voir* formule (5, 6), page 36)

$$\omega = c = \sqrt{\overline{ds}^2 + \overline{e_g}^2} = \sqrt{E^2 + H^2};$$

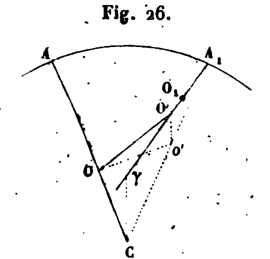
ou encore

$$(22) \qquad \omega = \sqrt{E^2 + H^2} = dS\sqrt{\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}}.$$

55. *Direction, position et grandeur de la plus courte distance entre deux normales consécutives.*

Soit OO′ la plus courte distance entre les normales principales en A, A_1 de la ligne considérée. C étant le centre de courbure de cette ligne pour le point A, menons $\overline{CA_1}$; abaissons $\overline{O'o'}$ perpendiculaire sur le plan ACA_1, ou sur la droite $\overline{CA_1}$, et menons $\overline{Oo'}$ qui sera perpendiculaire à $\overline{OC}$. Si nous appelons θ l'inclinaison, $\widehat{O'Oo'}$, de la droite cherchée OO′ sur le plan osculateur, la considération de l'indicatrice nous a déjà donné la formule

Fig. 26.



$$(23) \qquad \tan\theta = \frac{R_2}{R_1};$$

il suffira donc, pour fixer complétement la position de cette droite, de déterminer son pied O sur la normale $\overline{AC}$. Or les triangles rectangles $Oo'O'$, $O'o'A_1$, $o'OC$, dans lesquels les an-

gles en O, A_1 et C, sont respectivement égaux à θ, H et E, donnent successivement,

$$\tang\theta = \frac{o'O'}{o'O}, \quad o'O' = H.o'A_1, \quad \frac{1}{o'O} = \frac{1}{E.OC}:$$

de là, en multipliant membre à membre, et remplaçant $\tang\theta$, $\frac{H}{E}$, $o'A_1$ par $\frac{R_2}{R_1}$, $\frac{R_1}{R_2}$, OA; il vient

$$(23') \qquad \frac{OA}{OC} = \frac{R_2^2}{R_1^2} = \tang^2\theta.$$

Quant à la plus courte distance elle-même, en la désignant par ϖ, on a

$$\varpi = \overline{OO'} = dS.\cos\theta,$$

ou

$$(23'') \qquad \varpi = dS.\frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}.$$

Remarque. Nous avons supposé, dans la figure, le point O situé entre les points A et C. Pour démontrer qu'il en est toujours ainsi, il suffit de remarquer que les plans tangents en A et C de la surface gauche formée par les normales principales de la ligne AA_1, sont rectangulaires : le premier de ces plans contient en effet la tangente en A de la ligne AA_1, le second contient la droite polaire qui passe par le point C, et qui représente la tangente en ce point d'une trajectoire orthogonale des génératrices rectilignes de la surface; et ces droites sont perpendiculaires entre elles. Il en résulte (*voir* la page 12, observation) que le point central de la génératrice AC, c'est-à-dire le pied O de la plus courte distance considérée, est compris entre les points de contact de ces plans, c'est-à-dire entre les points A et C.

COROLLAIRE I. *Détermination du coefficient de distribution des plans tangents à la surface gauche formée par les normales principales.*

Suivant le théorème général démontré dans le chapitre I (n° 9, page 10), le coefficient dont il s'agit, k, est égal au

rapport de l'angle de deux génératrices consécutives à leur plus courte distance, $k = \frac{\omega}{\varpi}$; on a donc, en employant les formules (22) et (23″),

$$(24) \qquad k = \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1^2 . R_2}.$$

Corollaire II. On déduirait sans peine des résultats précédents, 1° l'expression de l'arc élémentaire OO_1 de la ligne de striction de la surface gauche des normales, et la direction de la tangente à cette ligne; 2° la direction de la droite rectifiante en A, laquelle est parallèle à $\overline{OO'}$; et l'arc élémentaire de l'arête de rebroussement de la surface rectifiante, arête dont nous avons calculé déjà les angles de contingence et de torsion, E′ et H′ (*voir* les formules (20) et (21), page 77) : la *surface rectifiante* étant, comme on sait, l'enveloppe des plans menés par les tangentes de la ligne considérée, perpendiculairement aux plans osculateurs correspondants; et les génératrices de cette surface portant le nom de *droites rectifiantes*.

56. *Rayon* R *de la sphère osculatrice*.

On a, pour le carré de ce rayon,

$$(25) \qquad R^2 = R_1^2 + R_2^2 \left(\frac{dR_1}{dS}\right)^2.$$

Cette équation résultera immédiatement de la formule (7) (*voir* page 37), si on se rappelle que le rayon de la sphère y a été pris pour unité de longueur, et si on y rétablit l'indétermination de cette unité; car il suffira dès lors de remarquer que, dans tout problème où l'on a seulement à considérer quatre points infiniment voisins d'une ligne à double courbure, on peut regarder cette ligne comme tracée sur la surface d'une sphère.

57. *Eléments divers relatifs à la ligne des centres de courbure et à l'arête de rebroussement de la surface polaire.*

Soient AA′, CC′ et SS′ la ligne à double courbure primitive, le lieu des centres de courbure et l'arête de rebroussement de

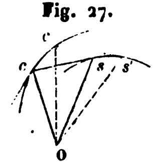
la surface polaire : développons cette surface sur un plan, et soient ss', cc' les transformées des lignes SS' et CC'; la ligne cc' étant, d'après le théorème de Lancret (*voir* page 19), la podaire de la ligne ss' par rapport à une certaine origine O. Si l'on pose

$$\overline{Os} = r, \quad \overline{Oc} = p,$$

on aura, par le même théorème et par l'emploi de la formule (25), page 81,

$$(a) \qquad r = \mathrm{R}, \quad p = \mathrm{R}_1 \quad \text{et} \quad \sqrt{r^2 - p^2} = \mathrm{R}_2 \cdot \frac{d\mathrm{R}_1}{d\mathrm{S}}.$$

Fig. 27.



Cela posé, il existe, entre la ligne plane ss' et sa podaire cc', plusieurs dépendances simples, soit métriques, soit descriptives, que nous devons d'abord rappeler.

1. *Les rayons vecteurs correspondants de ces deux lignes,* $\overline{Os}$ *et* $\overline{Oc}$, *les coupent sous des angles égaux.*

Il en résulte, en désignant par SS' et CC' les arcs élémentaires du lieu des centres et de l'arête de rebroussement qui correspondent à l'arc AA' = dS de la ligne primitive, ces trois relations :

$$\sin(cc', cO) = \frac{p}{r}, \quad \frac{cc'}{ss'} = \frac{\mathrm{CC'}}{\mathrm{SS'}} = \frac{dp}{dr},$$

$$cc' = \mathrm{CC'} = \frac{dp}{\cos(cc', cO)} = \frac{rdp}{\sqrt{r^2 - p^2}}.$$

2. La formule connue d'Euler donne ensuite pour le rayon de courbure de la ligne ss',

$$\rho_{ss'} = \frac{rdr}{dp}.$$

3. Et l'on trouve sans peine pour le rayon de courbure de la ligne cc' elle-même,

$$\rho_{cc'} = \frac{r^3}{2r^2 - p \cdot \rho_{ss'}} = \frac{r^2}{2r - p \cdot \dfrac{dr}{dp}}.$$

Or pour passer de là aux relations correspondantes entre les lignes CC′ et SS′ de l'espace, il suffit d'y remplacer r, p et $\sqrt{r^2 - p^2}$ par leurs valeurs (a); $\rho_{ss'}$ par le rayon de première courbure $R_{1,ss'}$ de l'arête de rebroussement SS′; et enfin, suivant le théorème II de la page 11, qui sera démontré plus loin, $\rho_{ss'}$ par le rayon de première courbure géodésique de la ligne CC′, $R_{1,g,cc'}$. On obtient ainsi les résultats suivants :

1′. *Les rayons correspondants de la sphère osculatrice et du cercle osculateur coupent sous des angles égaux l'arête de rebroussement de la surface polaire et la ligne des centres de courbure;* et l'on a

$$(26) \qquad \sin(CC', CA) = \frac{R_1}{R},$$

$$(27) \qquad \frac{CC'}{SS'} = \frac{dR_1}{dR},$$

$$(28) \qquad CC' = dS.\frac{R}{R_2};$$

2′.

$$(29) \qquad R_{1,ss'} = R.\frac{dR}{dR_1},$$

et l'on pourrait déduire de cette formule l'expression du rayon de seconde courbure de la même ligne, en se rappelant que $\dfrac{R_{2,ss'}}{R_{1,ss'}} = \dfrac{R_1}{R_2}$;

3′.

$$(30) \qquad R_{1g,cc'} = \frac{R^2}{2R - R_1\dfrac{dR}{dR_1}}.$$

Enfin, on peut trouver encore la valeur de la seconde courbure géodésique de la ligne des centres CC′, en employant la formule suivante, relative à une ligne quelconque CC′ tracée sur une surface développable ayant SS′ pour arête de rebroussement, et coupant sous un angle i la génératrice de la surface qui passe par le point considéré de la ligne CC′ (*voir* ci-après, cha-

pitre VIII, n° 3, formule (39″)),

$$R_{2,g,cc'} = \frac{r}{\sin i \cos i} \cdot \frac{R_{2,ss'}}{R_{1,ss'}};$$

dans laquelle r désigne la portion de génératrice comprise entre l'arête de rebroussement SS′ et la ligne CC′ : car on a, dans le cas actuel,

$$\frac{1}{\cos i} = \frac{1}{\sin(\mathrm{CC'}, \mathrm{CA})} = \frac{R}{R_1}, \quad \frac{r}{\sin i} = R, \quad \frac{R_{2,ss'}}{R_{1,ss'}} = \frac{R_1}{R_2};$$

et l'on trouve, en substituant,

$$(31) \qquad R_{2,g,cc'} = \frac{R^2}{R_2}.$$

Remarque. Les formules (30) et (31) appliquées en particulier à la *ligne sphérique dont la seconde courbure est constante*, conduisent à ce résultat : *La ligne des centres de courbure de la ligne sphérique dont la seconde courbure est constante, a ses deux courbures géodésiques constantes, par rapport à la surface conique polaire sur laquelle elle est tracée.*

58. *Expression de la distance entre deux tangentes consécutives d'une ligne à double courbure.*

On connaît cette intéressante proposition, due à M. Bouquet, et d'après laquelle *si dans une série quelconque de droites se succédant d'une manière continue, la distance de deux droites consécutives est un infiniment petit d'un ordre supérieur au premier, cette distance est au moins du troisième ordre* ; et les conséquences qui s'en déduisent relativement à l'ordre de la distance entre deux tangentes consécutives d'une ligne à double courbure. On peut, en modifiant l'ordre de succession de ces propositions, les établir géométriquement l'une et l'autre, comme nous allons le faire voir.

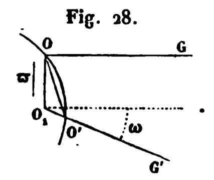
1. *Si la distance de deux droites consécutives quelconques d'une série est un infiniment petit d'un ordre supérieur au premier, les droites de cette série sont les tangentes d'une même ligne de l'espace.* Considérons, en effet, la surface ré-

glée S, ayant pour génératrices les droites de la série donnée : l'angle ω de deux génératrices consécutives de la surface étant du premier ordre, et leur plus courte distance ϖ étant, par hypothèse, d'un ordre supérieur au premier, le coefficient de distribution des plans tangents le long de chaque génératrice, $k = \lim. \frac{\omega}{\varpi}$, est infini; la surface a même plan tangent le long de chaque génératrice; elle coïncide avec la surface *développable* qui serait l'enveloppe de ces plans tangents; et les droites de la série donnée, dont chacune est située tout entière sur cette surface développable, coïncident avec les tangentes de son arête de rebroussement.

Ce premier point peut encore s'établir, plus clairement peut-être, de la manière suivante.

Considérant la *ligne de striction* OO′ de la surface S, soient $\overline{OG}$, $\overline{O'G'}$ deux génératrices infiniment voisines coupant cette ligne en O, O′; et soit $\overline{OO_1}$ leur plus courte distance. Cette dernière ligne étant au moins du second ordre, on en conclut, par l'emploi du triangle rectangle OO_1O', ou que la corde $\overline{OO'}$ de la ligne de striction est elle-même du second ordre, ou bien que cette corde restant du premier ordre, l'angle qu'elle forme en O′ avec la génératrice $\overline{O'G'}$ est infiniment petit. On déduit immédiatement de cette seconde hypothèse, que les génératrices sont tangentes à la ligne de striction OO′ qui devient dès lors l'arête de rebroussement de la surface : et quant à la première hypothèse, elle conduit aisément à la conclusion que la ligne de striction se réduit à un point unique; la surface se réduisant elle-même à un cône ayant son sommet en ce point.

Fig. 28.



2. *La distance de deux tangentes consécutives d'une ligne à double courbure est un infiniment petit du troisième ordre mesuré par le douzième du produit des angles de contingence et de torsion, multiplié par l'arc intercepté entre ces tangentes.* (Ossian Bonnet, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1853, page 192.)

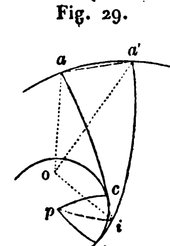
On peut évidemment, dans la recherche de la distance dont il est question, substituer à la ligne proposée L, qui est quelconque, une ligne sphérique l ayant avec elle un contact du troisième ordre; et au lieu de laisser indéterminée la nature de cette ligne sphérique, on peut la regarder comme une développante aa' d'un petit cercle cc' de la sphère: car on fait ainsi intervenir réellement, quoique d'une manière implicite, quatre points, et, par suite, deux tangentes consécutives des lignes L et l; ce qui est nécessaire et suffisant dans le problème actuel.

Cela posé, menons deux arcs de grand cercle infiniment voisins, normaux en a, a' à la ligne sphérique aa', tangents en c, c' au petit cercle dont le pôle est p, et se coupant en i; menons en outre les arcs pc, pc', pi, les rayons oi, oa, oa' et la corde $\overline{aa'}$; et posons, suivant la notation déjà employée,

$$\widehat{ac} = \theta, \quad \widehat{a'c'} = \theta + d\theta, \quad \text{arc } cc' = d\theta, \quad \widehat{pc} = \theta', \quad \widehat{cpc'} = \varepsilon'.$$

Le rayon oi de la sphère étant parallèle à la droite qui mesure la plus courte distance ϖ des tangentes en a, a' de la ligne considérée aa', cette plus courte distance est égale à la projection de la corde aa', ou à la différence des projections des rayons oa' et oa, sur le rayon oi: on a donc

Fig. 29.



$$\varpi = \cos ia' - \cos ia,$$

ou, par des transformations qui se lisent aisément sur la figure,

$$\varpi = 2 \sin(\theta + \varepsilon) \cdot \sin \frac{\widehat{ic} + \widehat{ic'} - \text{arc } cc'}{2};$$

ε désignant un arc infiniment petit. D'ailleurs, si on suppose menées les cordes sous-tendant les arcs ic, ic', cc', on sait que chacun de ces arcs est égal à la corde correspondante augmentée d'un infiniment petit du troisième ordre, et que la corde enveloppée cc' ne diffère de la somme des deux autres cordes

ci, $c'i$ que d'une quantité du même ordre : il en résulte que l'arc $\frac{ic + ic' - \text{arc}\, cc'}{2}$ est, ainsi que ϖ, du troisième ordre ; et que, sans commettre aucune erreur de cet ordre, on peut écrire

$$\varpi = \sin\theta\,(\widehat{ic} + \widehat{ic'} - \text{arc}\, cc').$$

Or, on a, sans rien négliger,

(a) $$\text{arc}\, cc' = \widehat{cpc'}.\sin cp = e'.\sin\theta';$$

et

$$\text{tang}\, ic = \sin\theta'.\text{tang}\,\frac{e'}{2},$$

ou

(b) $$\widehat{ic} + \widehat{ic'} = 2\widehat{ic} = 2\,\text{arc tang}.\sin\theta'\,\text{tang}\,\frac{e'}{2};$$

ou encore, en négligeant cette fois les infiniment petits d'un ordre supérieur au troisième,

(b′) $$\widehat{ic} + \widehat{ic'} = 2\sin\theta'.\,\text{tang}\,\frac{e'}{2} - \frac{2}{3}\sin^3\theta'.\,\text{tang}^3\frac{e'}{2}.$$

On déduit de là, en remarquant que $\text{tang}\,\frac{e'}{2} - \frac{e'}{2} = \frac{1}{3}\,\text{tang}^3\frac{e'}{2}$,

$$\widehat{ic} + \widehat{ic'} - \text{arc}\, cc' = 2\sin\theta'\left(\text{tang}\,\frac{e'}{2} - \frac{e'}{2}\right) - \frac{2}{3}\sin^3\theta'.\text{tang}^3\frac{e'}{2}$$
$$= \frac{2}{3}\sin\theta'\,\text{tang}^3\frac{e'}{2}(1 - \sin^2\theta') = \frac{2}{3}\sin\theta'\cos^2\theta'.\,\text{tang}^3\frac{e'}{2};$$

d'où, en substituant dans l'expression de ϖ, et remplaçant $\text{tang}\,\frac{e'}{2}$ par $\frac{e'}{2}$,

(1) $$\varpi = \frac{1}{12}e'^3\sin\theta.\sin\theta'\cos^2\theta'.$$

Enfin, en désignant par e, h et ds les angles de contingence et de torsion et l'arc élémentaire de la ligne aa', on a les relations connues

$$e' = \frac{e'_g}{\cos\theta'} = \frac{c}{\cos\theta'},\quad ds = e\sin\theta,\quad \text{tang}\,\theta' = \frac{cc'}{c'_g} = \frac{d\theta}{e} = \frac{h}{e},$$

que l'on peut écrire

(2) $$e'^3 \cos^2 \theta' = \frac{e^3}{\cos \theta'},$$

(3) $$\sin \theta' = \frac{ds}{e},$$

(4) $$\sin \theta' = \frac{h}{e} \cos \theta' :$$

et si on multiplie membre à membre les relations (1), (2), (3) et (4), on trouve, en simplifiant, la formule énoncée

(32) $$\varpi = \frac{e.h.ds}{12}.$$

3. Si on suppose du quatrième *ordre* la distance entre deux tangentes consécutives, l'un des nombres e, ou h, doit être infiniment petit par rapport à ds; et la ligne considérée est *droite* dans le premier cas, et *plane* dans le second.

CHAPITRE VI.

DES LIGNES A DOUBLE COURBURE QUI, CONSIDÉRÉES DANS TOUTE LEUR ÉTENDUE, JOUISSENT EN CHACUN DE LEURS POINTS D'UNE MÊME PROPRIÉTÉ, MÉTRIQUE OU DESCRIPTIVE; ET DE LA DÉFINITION GÉOMÉTRIQUE DE CHACUNE DE CES LIGNES D'APRÈS CETTE PROPRIÉTÉ. — THÉORÈMES. — ROLE IMPORTANT DE L'INDICATRICE DANS LA DÉMONSTRATION DE PLUSIEURS D'ENTRE EUX.

I.

Propriétés descriptives.

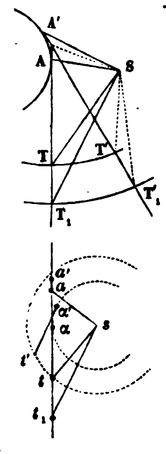
59. Si les tangentes d'une courbe rencontrent un plan fixe sous un angle constant, cette courbe est une hélice, ou une ligne géodésique d'un cylindre perpendiculaire au plan directeur : semblablement,

THÉORÈME I. *Si les tangentes d'une courbe à double cour-*

bure rencontrent une sphère fixe S *sous un angle constant, cette courbe est une ligne géodésique tracée sur un cône concentrique à la sphère directrice,* abstraction faite du cas, dont la possibilité est évidente, où la courbe serait une simple ligne sphérique, appartenant à une seconde sphère concentrique à la proposée.

Démonstration. Que l'on développe, en effet, sur un plan le cône *auxiliaire* ayant pour sommet le centre S de la sphère, et passant par la courbe donnée AA'. Dans ce développement, la ligne TT' déterminée sur la sphère par les traces des tangentes de la courbe proposée, se transformera en un cercle *tt'* ayant pour centre le point *s*, ou se réduira à un point unique *t*. Dans le dernier cas, toutes les tangentes de la ligne AA', transformée, concourent en un même point; cette ligne est droite, et la courbe primitive AA' est une ligne géodésique du cône déjà défini : dans le premier, les tangentes de la ligne AA', transformée, coupent le cercle (*tt'*, *s*) sous un angle constant; cette ligne est un second cercle concentrique au premier, et la courbe primitive AA' appartient à une sphère concentrique à la sphère directrice proposée.

Fig. 30.



Corollaire. Les tangentes d'une ligne à double courbure ne peuvent rencontrer deux sphères, distinctes et non concentriques, sous des angles constants.

Scolie. Nous verrons plus loin (*voir* ci-après, chap. VIII) que *toute surface développable dont une ligne de courbure* (ou une trajectoire orthogonale des génératrices rectilignes) *est plane, a pour arête de rebroussement une ligne géodésique tracée sur un cylindre perpendiculaire au plan de cette ligne ; toutes les autres lignes de courbure de la surface présentant, en outre, les mêmes particularités :* semblablement, *toute surface développable dont une des lignes de courbure est une ligne sphérique, a pour arête de rebroussement une*

ligne géodésique tracée sur un cône concentrique à la sphère qui contient cette ligne; et toutes les lignes de courbure de la surface appartiennent à des sphères concentriques. Il suffit, pour le démontrer, de concevoir développé sur un plan le cône *auxiliaire* passant par l'arête de rebroussement AA′ de la surface considérée, et ayant pour sommet le centre S de la sphère qui contient la ligne de courbure donnée TT′. Car la ligne AA′ étant une développée de TT′, la même relation subsiste encore entre ces deux lignes après le développement. Celui-ci doit donc transformer la ligne TT′, non en un cercle *tt′*, parce qu'alors la ligne AA′ se réduirait à un point, mais en un point unique *t* : et ce résultat conduit, comme précédemment, à la définition de l'arête de rebroussement AA′. D'ailleurs, l'une quelconque des autres lignes de courbure, $T_1T'_1$, se transformant en un point unique t_1 par le même développement, la distance de ce point au sommet S du cône développé représente le rayon d'une sphère, concentrique à la première, et contenant la ligne de courbure considérée.

On aurait pu éviter une nouvelle démonstration et rentrer dans le théorème I, en remarquant que la sphère S, qui contient la ligne de courbure donnée, coupe la surface sous un angle constant.

Théorème II. *Si les tangentes d'une courbe à double courbure sont tangentes à une même sphère, cette courbe est une ligne géodésique appartenant à un cône concentrique à la sphère; ou une ligne sphérique.*

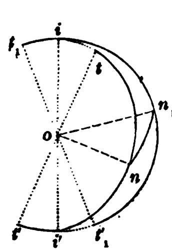
Démonstration. Le théorème actuel est un cas particulier du précédent, et se démontrerait, directement, de la même manière.

Corollaire. Les tangentes d'une courbe à double courbure ne peuvent être tangentes à deux sphères distinctes.

60. Théorème III. *Si par le centre d'une sphère on mène des rayons parallèles aux normales principales d'une ligne à double courbure fermée, mais d'ailleurs quelconque; leurs extrémités forment une courbe fermée, partageant la surface de la sphère en deux parties équivalentes* (Jacobi).

Démonstration. Considérons l'indicatrice sphérique tt_1 de la ligne considérée, et appliquons-lui la construction qui fournit la courbe nn_1, lieu des extrémités des rayons de la sphère parallèles aux normales principales de la ligne primitive; c'est-à-dire prenons sur chaque grand cercle tangent à l'indicatrice un arc tn égal à un quadrant. Si nous prolongeons, en outre, chacun des arcs tn en nt', jusqu'au point diamétralement opposé au point t, le point t' ainsi obtenu décrira sur la sphère une courbe $t't'_1$, symétrique de la première tt_1. D'ailleurs, la ligne primitive étant fermée, il en sera de même de chacune des lignes tt_1, $t't'_1$, et les aires sphériques enveloppées par ces lignes seront équivalentes. Il suffira donc, pour démontrer la proposition, d'établir que la courbe nn_1 divise en deux parties équivalentes la portion de la sphère comprise entre les lignes tt_1, $t't'_1$. Or ceci est évident, car si l'on appelle i, i' les points d'intersection des grands cercles tnt', $t_1n_1t'_1$, on peut prendre pour éléments respectifs des aires sphériques comprises entre la courbe nn_1 et chacune des lignes tt_1, $t't'_1$, les triangles infinitésimaux inn_1, $i'nn_1$; et comme chacun des arcs in, in_1, $i'n$, $i'n_1$ diffère infiniment peu d'un quadrant, ces triangles sont équivalents.

Fig. 31.



Observation. La démonstration précédente n'est autre que celle de M. Bonnet (voir *Journal de l'École Polytechnique*, 1848, page 132), dégagée néanmoins de quelques considérations qui paraissent étrangères à la question.

61. Théoreme IV. *Si les normales principales d'une ligne sont parallèles à un plan fixe, cette ligne est une hélice cylindrique.* (Bertrand, *Journal de Mathématiques*, 1850, page 343.)

Démonstration. Les tangentes rectilignes de l'indicatrice de la ligne considérée, étant parallèles aux normales principales de cette ligne, sont, dans le cas actuel, parallèles à un même plan :

l'indicatrice est donc plane et, par suite, circulaire; et les rayons de la sphère qui aboutissent à ses différents points font avec une direction fixe un angle constant. Il en est donc de même des tangentes de la ligne primitive, parallèles à ces rayons; et cette ligne est une hélice tracée sur un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires au plan fixe donné.

62. Théorème V. *Si les normales principales d'une courbe sont parallèles aux génératrices d'un cône de révolution, cette courbe est une ligne géodésique d'un héliçoïde développable.*

Démonstration. La réciproque de cette proposition est évidente, puisque les normales principales d'une telle ligne géodésique coïncident avec les normales mêmes de l'héliçoïde; et que ces dernières étant perpendiculaires aux plans osculateurs d'une hélice, lesquels sont parallèles aux plans tangents d'un premier cône droit, sont parallèles aux génératrices d'un second cône, de même axe que le premier.

Pour établir la proposition directe, imaginons que, par les diverses tangentes de la ligne considérée tt', on mène les *plans rectifiants,* perpendiculaires aux plans osculateurs *correspondants* de cette ligne. Ces plans formeront par leurs intersections successives une surface développable, *la surface rectifiante,* qui est ici un héliçoïde On voit aisément, en effet, que la génératrice de cette surface, pouvant être regardée comme perpendiculaire à deux normales principales consécutives de la ligne proposée, normales parallèles elles-mêmes à deux génératrices consécutives d'un cône droit, est perpendiculaire au plan tangent de ce cône, et fait avec l'axe de ce cône un angle constant. L'arête de rebroussement de la surface rectifiante, dont cette génératrice est une tangente, est donc une hélice, et la surface rectifiante elle-même est un héliçoïde développable. Enfin les normales principales de la courbe proposée, qui appartient à cet héliçoïde, étant normales à la surface, cette courbe est une ligne géodésique de l'héliçoïde.

On peut établir aussi la proposition par l'emploi de l'indica-

trice. Car les tangentes rectilignes de cette dernière, qui sont parallèles aux normales principales de la ligne primitive, se trouvent, dans le cas actuel, parallèles aux génératrices d'un cône de révolution. L'indicatrice est donc une hélice sphérique, ayant un *petit cercle* de la sphère pour *développée* (*voir* page 39). Or, les plans des grands cercles normaux à l'indicatrice sont parallèles aux plans rectifiants de la ligne primitive, et la développée de l'indicatrice sert d'indicatrice à l'arête de rebroussement de la surface rectifiante (*voir* page 76). Cette arête, ayant un petit cercle pour indicatrice, est donc une hélice cylindrique, et la surface rectifiante est un héliçoïde développable.

63. Théorème VI. *Si les normales principales d'une courbe rencontrent une droite fixe* oz, *cette courbe est une ligne géodésique tracée sur une surface de révolution ayant pour axe la droite* oz.

Démonstration. Si l'on considère, en effet, la surface de révolution engendrée par la rotation de la courbe donnée AB, autour de l'axe *oz*, la normale à cette surface, en chaque point de la courbe AB, devra être normale à cette courbe elle-même, et rencontrer en outre l'axe *oz* de la surface; et comme ces conditions sont déjà remplies par la normale principale de la courbe AB, ces deux normales coïncident, et la courbe AB est une ligne géodésique de la surface de révolution déjà définie.

Il résulte de ce théorème qu'il suffirait, pour rechercher les propriétés que présente, par rapport à une droite fixe *oz*, une ligne à double courbure dont les normales principales rencontrent constamment cette droite, d'examiner les liaisons qui existent entre une ligne géodésique d'une surface de révolution et l'axe de cette surface : or ces liaisons sont exprimées par la proposition suivante :

Théorème VII. *En chaque point d'une ligne géodésique d'une surface de révolution, le rayon du parallèle qui passe par ce point, multiplié par le cosinus de l'angle de ce parallèle et de la ligne géodésique considérée, donne un produit*

constant. (Clairaut, *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1733.)

Première démonstration. On sait qu'une ligne géodésique d'une surface quelconque peut être considérée comme la trajectoire d'un mobile qui, animé primitivement d'une vitesse convenablement dirigée, et n'étant sollicité par aucune force extérieure, serait uniquement soumis à la réaction normale de la surface. D'ailleurs, et dans ces circonstances, le mouvement du mobile étant uniforme, les arcs parcourus sont proportionnels aux temps; et l'on a

$$(1) \qquad ds = c.dt,$$

c désignant une constante. D'un autre côté, le mobile pouvant être regardé comme entièrement libre et soumis à l'action d'une force extérieure représentant la réaction normale de la surface supprimée; sa projection, sur un plan quelconque, se meut comme un point matériel sollicité à chaque instant par la projection, sur ce plan, de la réaction normale primitive.

Or, si l'on suppose maintenant que la surface considérée soit de révolution autour de l'axe oz, et que le plan de projection xy soit perpendiculaire à cet axe, on voit que la projection, sur ce plan, du mobile primitif se meut sous l'action d'une force émanant d'un centre fixe o, qui est le pied de l'axe oz sur le plan xy. Les aires décrites autour du point o par le mobile projeté sont donc proportionnelles aux temps; et l'on a, en désignant par r le rayon du parallèle et par c' une nouvelle constante,

$$(2) \qquad r^2 d\omega = c'.dt;$$

enfin, de la comparaison des relations (1) et (2), on déduit,

$$(3) \qquad r.\frac{rd\omega}{ds} = \frac{c'}{c} = \text{constante}:$$

et il est aisé d'apercevoir dans cette relation l'expression analytique du théorème VII.

Seconde démonstration. AA' étant une ligne quelconque

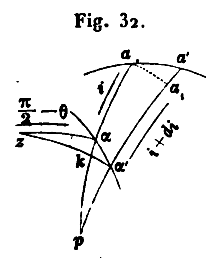
tracée sur la surface de révolution qui a pour axe la droite zz, nous désignerons par r, comme précédemment, le rayon du parallèle qui passe par ce point; par θ l'inclinaison de ce rayon sur la courbe méridienne $\widehat{zA}$ du même point; par i et $i+di$ les angles que la courbe considérée AA' forme, en A et A', avec les courbes méridiennes de ces points, et par $d\omega$ l'angle formé par les plans de ces dernières.

Ces notations posées, imaginons, par le centre d'une sphère, des rayons oz, $o\alpha$, $o\alpha'$ parallèles respectivement à l'axe de la surface et aux tangentes des sections méridiennes aux points A, A'; et, ayant construit l'indicatrice aa' de la courbe AA', menons les arcs de grand cercle $z\alpha$, $z\alpha'$ (parallèles aux plans des sections méridiennes des points A, A'); $\widehat{a\alpha}$, $\widehat{a'\alpha'}$ perpendiculaires aux précédents et se coupant en p : enfin, décrivons du point p, comme pôle, l'arc de cercle aa_1. On a, dans le triangle rectangle aa_1a',

$$(a)\qquad a_1a' = aa' . \cos a = \mathrm{E} \cos a,$$

E et a désignant l'angle de contingence et l'inclinaison, sur le plan tangent, du plan osculateur de la ligne AA' en A. D'ailleurs l'arc $z\alpha'$ pouvant être considéré comme perpendiculaire en k sur l'arc $a\alpha p$, on peut regarder le point p comme le pôle de l'arc $k\alpha'$, et poser l'égalité

Fig. 32.



$$\widehat{ka} = \widehat{\alpha' a_1},$$

d'où l'on déduit

$$\widehat{a_1a'} = (\widehat{a'\alpha'} - \widehat{a\alpha}) - \widehat{k\alpha} = di - \widehat{k\alpha},$$

ou

$$(b)\qquad a_1a' = di - \cos\theta . d\omega;$$

et la comparaison des relations (a) et (b) conduit à cette formule générale

$$(33)\qquad \mathrm{E}_g = \mathrm{E} . \cos a = di - \cos\theta . d\omega,$$

qui se réduit, dans le cas où il s'agit d'une ligne géodésique, à celle-ci :

$$di - \cos\theta \,.\, d\omega = 0.$$

Enfin on trouve sur la figure de l'espace, et en désignant par $d\sigma$ l'arc élémentaire de la section méridienne,

$$\cos\theta = \pm\frac{dr}{d\sigma}, \quad r d\omega = d\sigma.\mathrm{tang}\, i; \quad \cos\theta . d\omega = \pm\frac{dr}{r}\mathrm{tang}\, i:$$

et la substitution de cette dernière valeur dans la formule précédente donne successivement

$$di \pm \frac{dr}{r}\mathrm{tang}\, i = 0, \quad \frac{\cos i \,.\, di}{\sin i} \pm \frac{dr}{r} = 0, \quad \frac{d.\sin i}{\sin i} \pm \frac{dr}{r} = 0;$$

d'où, en intégrant,

$$r^{\pm 1}.\sin i = \text{constante}.$$

On pourra d'ailleurs faire disparaître l'ambiguïté que présente encore cette formule, en prenant, au lieu d'une surface quelconque, un cône de révolution dont les lignes géodésiques sont, évidemment, représentées par l'équation

$$(34) \qquad r \sin i = \text{constante}.$$

Scolie. Les normales principales d'une ligne à double courbure peuvent-elles rencontrer constamment deux droites fixes, non situées dans le même plan, ou, en d'autres termes, *deux surfaces de révolution, dont les axes ne se rencontrent pas, peuvent-elles être en contact suivant une ligne géodésique?*

Si cette question devait être résolue négativement, le théorème suivant serait une conséquence immédiate de cette conclusion, et la démonstration que nous allons en donner deviendrait inutile.

Théorème VIII. Les normales principales d'une ligne à double courbure ne forment jamais une surface réglée du second degré. (Bertrand, *Journal de Mathématiques*, 1850, p. 342.)

Démonstration. Une ligne à double courbure quelconque est, en effet, une ligne *asymptotique* de la surface gauche for-

mée par les normales principales de cette ligne; et il ne passe d'ailleurs, en chaque point d'une surface quelconque, que deux lignes asymptotiques. Or, dans une surface réglée du second degré (hyperboloïde à une nappe, ou paraboloïde hyperbolique), toutes les lignes asymptotiques sont des lignes *droites*, à savoir, les génératrices rectilignes de la surface, de l'un ou de l'autre système : donc, etc.

COROLLAIRE. *Les normales principales d'une ligne à double courbure ne peuvent rencontrer en même temps trois droites fixes*, ou, *rencontrer deux droites fixes et se trouver parallèles à un plan fixe* : et, en particulier, *les normales principales d'une hélice cylindrique quelconque ne peuvent rencontrer deux droites fixes.*

64. THÉORÈME IX. *Si les normales principales d'une ligne rencontrent à angle droit une droite fixe* OZ, *cette ligne est une hélice tracée sur un cylindre de révolution ayant pour axe la droite* OZ.

Démonstration. D'après le théorème VI, la courbe considérée est une ligne géodésique de la surface de révolution S, qui aurait pour génératrice cette courbe elle-même, et pour axe la droite OZ. D'ailleurs les normales principales de la courbe, ou les normales de la surface S, étant perpendiculaires à l'axe OZ, les plans tangents de la surface sont parallèles à OZ, et la surface S est un cylindre parallèle à OZ. La courbe considérée est donc une ligne géodésique tracée sur une surface cylindrique, de révolution autour de l'axe OZ; ou une hélice appartenant à un cylindre de révolution.

65. THÉORÈME X. *Si les normales principales d'une courbe rencontrent sous un angle constant une droite fixe* OZ, *cette courbe est une ligne géodésique tracée sur un cône de révolution, ayant pour axe la droite* OZ.

Démonstration. Il résulte encore des données de la question que la courbe considérée est une ligne géodésique d'une surface de révolution ; et que les plans tangents de cette sur-

face font avec l'axe OZ un angle constant : les tangentes d'une section méridienne de la surface, aux différents points de cette section, font donc avec l'axe OZ un angle constant; la section méridienne est donc une droite, et la surface se réduit à un cône de révolution.

Observation. Les normales principales de la ligne géodésique considérée forment une surface gauche ayant l'axe même du cône pour ligne de striction.

II.

Propriétés métriques.

66. *Des relations existant entre une ligne dont la première courbure est constante, et le lieu des centres de courbure de cette ligne.*

Soient AA′ la ligne proposée; AC, A′C′ ses rayons de courbure en A, A′, et CC′ la ligne des centres de courbure. La droite $\overline{AC}$, de longueur constante, étant normale à la courbe décrite par son origine, est aussi normale à la courbe décrite par son extrémité; et la tangente du lieu des centres de courbure est, par suite, perpendiculaire à la normale principale. D'ailleurs la normale principale, la tangente du lieu des centres de courbure et la droite polaire, relatives à un même point d'une ligne quelconque, sont toujours situées dans un même plan; et comme ces deux dernières droites sont l'une et l'autre, dans le cas actuel, perpendiculaires à la première, elles coïncident. Donc les droites polaires, c'est-à-dire les tangentes de l'arête de rebroussement de la surface polaire, coïncident avec les tangentes de la ligne des centres; et, par suite, la ligne des centres de courbure elle-même coïncide avec l'arête de rebroussement de la surface polaire. Cela posé,

Les normales principales de l'arête de rebroussement étant parallèles aux normales principales de la ligne primitive, quelle que soit cette ligne, les normales principales du lieu des centres, dans le cas actuel, coïncident avec celles de la ligne proposée.

De même les tangentes de l'arête de rebroussement étant, quelle que soit la ligne primitive, perpendiculaires aux plans osculateurs de cette ligne, les tangentes du lieu des centres de la proposée sont perpendiculaires à ses plans osculateurs; et, par suite, inversement, les plans osculateurs de la proposée coïncident avec les plans normaux de la ligne des centres. Il en résulte que la limite de l'intersection de deux plans osculateurs ou la tangente de la proposée coïncide, avec la droite polaire relative à la ligne des centres; et la courbe proposée est l'arête de rebroussement de la surface polaire relative à la ligne des centres. D'ailleurs le centre de courbure de cette dernière, situé à la fois sur la normale principale et sur la droite polaire, coïncide avec le point correspondant de la ligne primitive, et celle-ci est à la fois la ligne des centres de courbure et l'arête de rebroussement de la surface polaire relatives à la ligne des centres CC' dont le rayon de courbure, égal à celui de la proposée AA', est constant comme lui.

Enfin, le produit des rayons de seconde courbure d'une ligne quelconque et de l'arête de rebroussement de la surface polaire est égal au produit de leurs rayons de première courbure : on a donc, entre les rayons de la courbe considérée et de la ligne des centres de courbure, la relation

$$R_{,,AA'} \cdot R_{,,CC'} = R_{,}^{2},$$

et en réunissant ces résultats, on obtient le théorème suivant:

Théorème XI. *Si l'on considère une courbe dont la première courbure est constante et la courbe lieu des centres de courbure de la première, ces deux courbes ont mêmes normales principales; chacune d'elles est à la fois la ligne des centres de courbure et l'arête de rebroussement de la surface polaire relatives à l'autre; leurs premières courbures sont égales, et le produit de leurs secondes courbures est constant et égal au carré de la première courbure commune à ces deux lignes* (Bouquet).

67. Théorème XII. *Si les deux courbures d'une ligne ont*

un rapport constant, cette ligne est une hélice cylindrique. (Bertrand, *Journal de Mathématiques*, 1848, page 423.)

Première démonstration. Considérons l'indicatrice sphérique de la ligne proposée : le rayon de courbure géodésique de l'indicatrice étant égal au rapport de la première à la seconde courbure de la ligne primitive, la courbure géodésique de l'indicatrice est constante, et l'indicatrice est un petit cercle de la sphère. Il en résulte que les rayons de la sphère aboutissant aux différents points de l'indicatrice, et, par suite, les tangentes de la ligne primitive, qui sont parallèles à ces rayons, font un angle constant avec une direction fixe : et la ligne primitive est une hélice, tracée sur un cylindre parallèle à cette direction.

Seconde démonstration. Considérons la *surface rectifiante* relative à la ligne proposée. Les génératrices de cette surface sont parallèles aux droites qui mesurent les plus courtes distances entre les normales principales consécutives de la ligne proposée ; et l'inclinaison de l'une de ces droites sur cette ligne a pour tangente trigonométrique le rapport $\frac{R_2}{R_1}$ de ses deux courbures, rapport qui est ici constant, par hypothèse. La courbe proposée, qui est toujours une ligne géodésique de la surface rectifiante, est donc, en outre, dans le cas actuel, une trajectoire sous un angle constant des génératrices rectilignes de cette surface, et conserve la même propriété après le développement de cette dernière sur un plan. La courbe proposée se transforme donc par le développement de la surface rectifiante, en une ligne droite qui coupe sous un angle constant les génératrices développées. Les génératrices sont donc parallèles après et, par suite, aussi avant le développement ; la surface rectifiante est un cylindre, et la courbe proposée est une hélice tracée sur ce cylindre.

68. THÉORÈME XIII. *Si chacune des deux courbures d'une ligne est constante, cette ligne est une hélice tracée sur un cylindre de révolution.* (Puiseux, *Journal de Mathématiques*, tome VII, 1842, page 65.)

Démonstration. Les deux courbures de la ligne proposée étant séparément constantes, leur rapport est aussi constant; et cette ligne est une hélice, d'après le théorème précédent. D'ailleurs le rayon de première courbure de cette hélice étant constant, il en est de même du rayon de courbure de la section droite du cylindre qui la contient (*voir* page 7): Cette section droite est donc un cercle, et le cylindre est de révolution.

69. Théorème XIV. *Toute hélice dans laquelle le rapport* $\frac{dR_1}{dS}$ *est constant* (sans être nul) *appartient à un cylindre ayant pour base une spirale logarithmique; cette courbe est en même temps une hélice conique coupant sous un angle constant les génératrices d'un cône de révolution, dont l'axe passe par le pôle de la spirale et se trouve parallèle aux génératrices du cylindre.* Nous appellerons cette courbe *hélice cylindro-conique.*

Démonstration. Le rayon de courbure ρ et l'arc s de la section droite du cylindre qui contient l'hélice considérée, étant respectivement proportionnels aux grandeurs correspondantes et analogues de celle-ci, le rapport $\frac{d\rho}{ds}$ de leurs différentielles est constant pour la section droite, comme le rapport $\frac{dR_1}{dS}$ pour l'hélice: et l'on en conclut, en premier lieu (*voir* page 39, Observation), que cette section droite est une spirale logarithmique.

Que l'on regarde, en second lieu, l'hélice donnée comme la génératrice d'une surface de révolution ayant pour axe la parallèle $\overline{oz}$ aux génératrices du cylindre menée par le pôle o de la spirale, et que l'on rapporte la section méridienne de cette surface à l'axe $\overline{oz}$ et à une perpendiculaire $\overline{ox}$ à $\overline{oz}$ menée dans le plan de la section. On reconnaît aisément que les variations correspondantes des coordonnées z et x d'un point de la section méridienne sont mesurées respectivement par les projections, sur l'axe du cylindre et sur le rayon vecteur de la spirale,

des arcs correspondants de l'hélice et de la spirale; et que ces variations, par suite, sont respectivement égales aux produits de ces arcs par des nombres constants. Or le rapport de ces arcs étant constant, il en est de même du rapport des variations des coordonnées z et x de la section méridienne; cette section est une ligne droite, et l'hélice considérée appartient à un cône de révolution.

Enfin, on voit immédiatement, à l'aide de l'indicatrice, qu'une courbe tracée sur un cône de révolution et faisant avec l'axe de ce cône un angle constant, coupe pareillement ses génératrices sous un angle constant; et la courbe considérée est une hélice cylindro-conique, suivant les termes de l'énoncé.

Réciproquement, *l'hélice conique, c'est-à-dire la courbe tracée sur un cône de révolution et coupant ses génératrices sous un angle constant, n'est autre que l'hélice cylindro-conique définie précédemment.*

On reconnaît, en effet, à l'aide de l'indicatrice, que les diverses tangentes de la courbe considérée font un angle constant avec l'axe du cône, cette courbe étant dès lors une hélice tracée sur un cylindre parallèle à cet axe. D'ailleurs la section droite du cylindre, ou la projection de la courbe sur un plan perpendiculaire à l'axe, est une spirale logarithmique. Car d'après la définition de l'hélice conique, les variations correspondantes de l'arc de la courbe et du rayon vecteur issu du sommet du cône, sont dans un rapport constant : il en est donc de même des variations de l'arc et du rayon vecteur de la projection; et le rayon vecteur de la projection coupe celle-ci sous un angle constant, ce qui est la définition de la spirale logarithmique.

70. Théorème XV. *Toute courbe coupant, sous des angles constants, les génératrices d'un cône et celles d'un cylindre, dont elle est la commune intersection, appartient nécessairement à un cône de révolution, et, par suite, est une hélice cylindro-conique.*

Démonstration. Menons, en effet, par le sommet o du cône, un plan xy perpendiculaire à la direction oz des génératrices

du cylindre, et désignons par r et z les distances d'un point quelconque de la courbe au sommet du cône et au plan xy. On a cette double expression de l'arc élémentaire de la courbe :

$$dS = \frac{dr}{\cos i}, \quad dS = \frac{dz}{\cos i_1},$$

i et i_1 désignant des angles constants. Il en résulte l'équation différentielle

$$\frac{dr}{\cos i} = \frac{dz}{\cos i_1},$$

et l'équation, en termes finis,

$$\frac{r}{\cos i} = \frac{z - C}{\cos i_1}$$

de la courbe considérée, C désignant une constante. D'ailleurs une hélice, tracée sur un cône quelconque, ayant toujours le sommet du cône pour point asymptote, l'équation précédente doit être satisfaite par $r = 0$ et $z = 0$; la constante C est nulle, et l'on a simplement

$$\frac{r}{\cos i} = \frac{z}{\cos i_1},$$

ou

$$\frac{z}{r} = \frac{\cos i_1}{\cos i} = \text{constante.}$$

Et cette relation exprime que le cône qui renferme la courbe considérée est de révolution autour d'un axe oz parallèle aux génératrices du cylindre ; ce qui suffit à la démonstration. (Vieille, *Compléments d'Analyse et de Mécanique*, page 89.)

71. Théorème XVI. *Si une courbe à double courbure et la ligne des centres de courbure sont deux hélices tracées sur des cylindres parallèles, la courbe proposée est une hélice droite appartenant à un cylindre de révolution, ou une hélice cylindro-conique.* (Tissot, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1852, page 455.)

Démonstration. Soient en effet AA′ la courbe proposée,

CC′ la ligne des centres de courbure et SS′ l'arête de rebroussement de la surface polaire relative à AA′. Cette dernière étant une hélice, il en est de même de SS′, et le cylindre qui la contient est parallèle au cylindre contenant AA′ : donc, par suite de l'hypothèse, les hélices SS′ et CC′ appartiennent à des cylindres parallèles. Or, on reconnaît facilement, par l'emploi de l'indicatrice, que « toute hélice CC′, tracée sur un héliçoïde développable, et appartenant à un cylindre parallèle à celui qui contient l'arête de rebroussement SS′ de l'héliçoïde, est une trajectoire des génératrices rectilignes de la surface. » Donc, dans le cas actuel, la ligne des centres de courbure CC′ coupe, sous un angle constant, et les droites polaires $\overline{CS}$, et les normales principales $\overline{CA}$ de la ligne AA′. Or on a trouvé (*voir* formule (26), page 83)

$$\sin(CC', CA) = \frac{R_1}{R},$$

et il en résulte pour le cas actuel la relation

$$\frac{R}{R_1} = \text{constante};$$

on déduit d'ailleurs de la formule (25) (*voir* page 81),

$$\frac{R^2}{R_1^2} = 1 + \frac{R_2^2}{R_1^2} \cdot \left(\frac{dR_1}{dS}\right)^2,$$

et le rapport $\frac{R_2}{R_1}$ étant constant, puisque la courbe est une hélice, on a simplement

$$\frac{dR_1}{dS} = C = \text{constante}.$$

On parvient plus rapidement encore à ce premier résultat, par l'emploi de la formule

$$\operatorname{tang}(CC', CA) = \frac{R_1 . H}{dR_1} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{dS}{dR_1},$$

qu'il est aisé de démontrer.

Cela posé, si la constante C est nulle, R_1 est constant et l'hélice appartient à un cylindre de révolution : dans le cas

contraire, on rentre dans le théorème XIV, et la courbe est une hélice cylindro-conique.

Observation. Quand la ligne primitive est une hélice tracée sur un cylindre de révolution, on sait que la ligne des centres de courbure CC′ et l'arête de rebroussement SS′ de la surface polaire, qui coïncident, sont des hélices de même nature que la première, tracées sur un cylindre de même axe que le premier; la ligne de striction de la surface gauche, formée par les normales principales, se réduisant à une ligne droite, coupée à angle droit par chaque génératrice, et qui est l'axe même du cylindre. Le théorème suivant, dont une partie seulement a été énoncée déjà par M. Tissot, met en évidence les propriétés analogues de l'hélice cylindro-conique.

72. Théorème XVII. *Dans toute hélice cylindro-conique, la ligne de striction* OO′ *de la surface gauche des normales principales, la ligne des centres de courbure* CC′, *et l'arête de rebroussement* SS′ *de la surface polaire sont trois hélices cylindro-coniques, appartenant à des cônes de même axe et de même sommet que celui qui contient la courbe primitive.*

Démonstration. 1). Nous occupant d'abord de la ligne de striction, soient OO′ l'arc élémentaire de cette ligne, $OO_1 = \varpi$ la plus courte distance entre les normales principales AC, A′C′; r la distance $\overline{AO}$ et m le rapport constant $\frac{R_2}{R_1}$ relatif à l'hélice AA′. On a

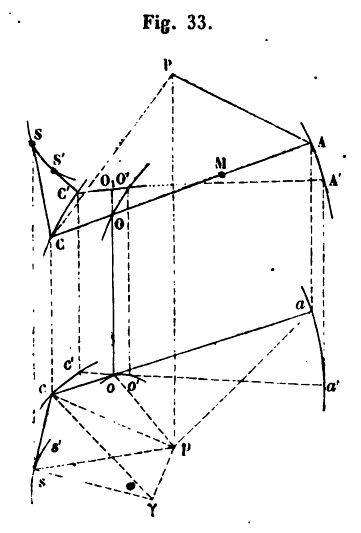
$$\operatorname{tang}(OO', AC) = \frac{OO_1}{O'O_1} = \frac{\varpi}{dr}.$$

Or la ligne AA′ étant une hélice dont les génératrices sont parallèles à la plus courte distance OO_1, cette plus courte distance ϖ et l'arc élémentaire $AA' = dS$ sont dans un rapport constant; en outre, à cause de la relation $\frac{AO}{CO} = \frac{R_2^2}{R_1^2} =$ constante, AO ou r est proportionnelle à AC ou R_1, dr est proportionnelle à dR_1, et l'on a, par suite,

$$\operatorname{tang}(OO', AC) = \frac{\varpi}{dr} = C\frac{dS}{dR_1} = C',$$

C et C′ désignant des constantes. Il résulte de là, en général, que, *parmi les hélices, celles qui appartiennent à un cylindre, ou à un cône de révolution, sont les seules pour lesquelles la ligne de striction de la surface gauche des normales principales soit une trajectoire des génératrices rectilignes de la surface;* et, en particulier, que la ligne de striction OO′ relative à l'hélice considérée AA′, est elle-même une hélice tracée sur un cylindre parallèle à celui qui contient cette ligne. D'ailleurs, *dans toute surface gauche à plan directeur, les trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes, projetées sur ce plan, ont pour commune développée la projection de la ligne de striction de la surface.* Donc, dans le cas actuel, la section droite du cylindre contenant la ligne de striction OO′ est la développée de la spirale logarithmique qui sert de base au cylindre contenant AA′; cette section droite est une spirale logarithmique égale à la première et de même pôle, et *la ligne de striction* OO′ *est une hélice cylindro-conique tracée sur un cône de même axe que celui contenant l'hélice primitive* AA′. (*Voir* Théorème XIV.)

Fig. 33.



2). Si l'on désigne, en second lieu, par p le pôle commun des spirales aa', oo' projections des hélices AA′, OO′, et que, projetant sur le même plan CC′ suivant cc', on joigne $\overline{pa}$, $\overline{po}$, $\overline{pc}$; on voit que le rapport $\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OC}} = \frac{\mathrm{R}_2^2}{\mathrm{R}_1^2}$ étant constant, le rapport égal $\frac{oa}{oc}$ est constant, ainsi que le rapport $\frac{ao}{ac}$. Mais déjà, sur la figure, le rapport $\frac{pa}{oa}$ et l'angle pao, ou $\widehat{pac}$ sont constants; et

il résulte de tout cela que le rapport $\frac{pa}{ac}$ et l'angle *pac* sont constants, et que le triangle *pac* est donné d'espèce. L'angle *apc* et le rapport $\frac{pa}{pc}$ sont donc constants à leur tour, et le point *c* décrit une spirale logarithmique, égale à chacune des précédentes *aa'*, *oo'*, et de même pôle qu'elles. Il résulte, en outre, des relations précédentes entre les spirales *aa'* et *cc'*, et du parallélisme constant de $\overline{AC}$ et de $\overline{ac}$, que le point *c* décrit une hélice sur le cylindre ayant pour base *cc'*, de la même manière que le point A sur le cylindre ayant pour base *aa'*.

Les éléments correspondants des lignes *aa'* et *cc'* étant, en effet, dans un rapport constant, on a

$$\frac{CC'.\sin\gamma}{AA'.\sin\alpha} = \text{constante};$$

et les projections sur $\overline{Cc}$ et $\overline{Aa}$ des éléments correspondants CC' et AA' étant égales entre elles, on a

$$\frac{CC'.\cos\gamma}{AA'.\cos\alpha} = 1:$$

on en déduit

$$\frac{\tang\alpha}{\tang\gamma} = \text{constante},$$

et, par suite, $\hat{\gamma}$ est constant comme $\hat{\alpha}$. On en conclut que *la ligne des centres de courbure* CC' *est une hélice cylindro-conique, de même axe que les précédentes*, AA' *et* OO'.

3). Quant à l'arête de rebroussement de la surface polaire SS', ses normales principales étant, dans tous les cas, parallèles à celles de la ligne primitive, et celle-ci étant une hélice dans le cas actuel; SS' et AA' sont des hélices situées sur des cylindres parallèles; et il en est de même des hélices SS' et CC': d'où cette conséquence, déjà énoncée, que CC' est une trajectoire des génératrices rectilignes de la surface polaire. Il résulte de là que le trièdre formé au point C, par la droite CS, la tangente à la ligne CC' et la génératrice Cc du cylindre con-

tenant CC′, est constant, ainsi que le dièdre suivant $\overline{Cc}$. Or si l'on projette, sur le plan de projection déjà employé, SS′ et CC′ suivant ss' et cc', il est facile de voir que les droites sc qui sont tangentes à la ligne ss', coupent la ligne cc' sous un angle qui mesure le dièdre précédent, et qui, par suite, demeure constant. Si donc on appelle γ le centre de courbure en c de la spirale cc', que l'on joigne $\overline{pc}$, $\overline{p\gamma}$, $\overline{ps}$ et $\overline{c\gamma}$, on reconnaît que le quadrilatère $cp\gamma s$, bi-rectangle en p et s, est donné d'espèce, ainsi, par conséquent, que le triangle pcs. L'angle cps et le rapport $\frac{ps}{pc}$ sont constants; le point s décrit une spirale logarithmique égale à chacune des précédentes, et de même pôle qu'elles; et *l'arête de rebroussement* SS′ *de la surface polaire est encore une hélice cylindro-conique, de même axe que les précédentes* AA′, OO′ *et* CC′.

4). Il est facile de voir, en dernier lieu, que *les cônes de révolution contenant les quatre lignes* AA′, OO′, CC′ et SS′, *ont même sommet* P. Car si l'on appelle P le sommet du cône contenant AA′, et si l'on conçoit que le point A se rapproche indéfiniment du sommet P, le rayon de courbure $AC = R_1$ de AA′, qui est proportionnel à la distance PA, tendra indéfiniment vers zéro. Donc les trois côtés du triangle ACS, donné d'espèce, tendent simultanément vers zéro en même temps que le point A tend vers le sommet P. Il en résulte que les sommets C et S de ce triangle, et le point O qui divise le côté AC dans un rapport constant, tendent à se confondre avec le point A, pendant que celui-ci tend lui-même vers le point P; et les hélices décrites par les points O, C et S ont, pour point asymptote commun, le sommet P du cône contenant l'hélice AA′; ce qui suffit à la démonstration.

Remarque I. La surface gauche formée par les normales principales de l'hélice AA′ contient une infinité d'hélices cylindro-coniques, de même axe et de même sommet que la proposée; ces hélices peuvent se construire par points en divisant dans un rapport constant quelconque chaque rayon de

courbure AC de la ligne proposée; et elles sont les *lignes asymptotiques* de la surface (*voir* ci-après le chapitre IX).

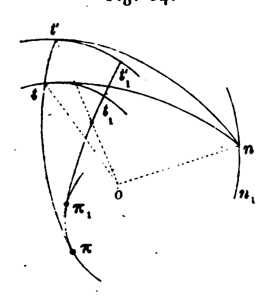
Remarque II. Les rayons de première et de seconde courbure de l'hélice cylindro-conique sont, en chaque point de cette courbe, proportionnels à la distance de ce point à un point fixe P. Mais la réciproque n'est pas vraie, à moins que l'on n'ajoute la condition que le point fixe P appartienne, comme point asymptote, à la courbe considérée.

73. Problème. *Trouver la définition de la ligne à double courbure* L *dont les normales principales peuvent coïncider avec les normales principales d'une seconde ligne* L'; *et les relations métriques, ou descriptives, existant entre les lignes conjuguées* L *et* L'.

Solution. 1). Cherchons, *en premier lieu*, les relations descriptives qui peuvent exister entre les lignes L, L' que nous supposons avoir mêmes normales principales.

Recourant, à cet effet, aux indicatrices sphériques de ces deux lignes, nous remarquerons que les lignes considérées ayant mêmes normales principales, la ligne sphérique nn_1, lieu des extrémités des rayons parallèles à ces normales, doit être la même pour les deux courbes L et L'. Il en résulte, d'après la génération de la ligne nn_1 au moyen de chacune des indicatrices tt_1, tt'_1 (*voir* page 78), que les arcs de grand cercle nt, nt' sont des quadrants, et sont en outre tangents aux indicatrices tt_1, $t't'_1$. Donc l'arc de grand cercle tt' joignant deux points *correspondants* quelconques de ces lignes est normal à l'une et à l'autre; les deux indicatrices ont même développée sphérique, et l'arc de grand cercle normal tt', compris entre ces lignes, conserve une valeur constante. Or cet arc mesure l'angle tot' ou son égal, l'angle des tangentes aux lignes L, L' menées par des points correspondants de ces lignes. Nous arri-

Fig. 34.



vons donc à ce résultat, qui subsisterait encore si les normales principales des deux lignes, au lieu de coïncider, étaient seulement parallèles : *Les tangentes des deux lignes conjuguées* L, L′, *menées en des points correspondants de ces lignes, font entre elles un angle constant.* La figure sphérique fournit d'ailleurs une première expression de la tangente de cet angle constant φ : car en désignant par π le centre de courbure sphérique des deux indicatrices pour les points t et t', on a

$$\varphi = \widehat{tt'} = \widehat{\pi t'} - \widehat{\pi t} = \theta' - \theta,$$

et, par suite, puisque l'on a

$$\tang\theta = \frac{R_2}{R_1}, \quad \tang\theta' = \frac{R'_2}{R'_1},$$

(1)
$$\tang\varphi = \frac{\frac{R'_2}{R'_1} - \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R'_2}{R'_1}\cdot\frac{R_2}{R_1}}:$$

R_1 et R_2, R'_1 et R'_2 désignant les rayons de première et de seconde courbure des lignes L, L′.

2). Revenons, *en second lieu*, à la figure primitive composée des lignes AB, A′B′ et de leurs normales principales communes AA′, BB′; et cherchons de nouvelles expressions de l'angle des éléments correspondants AB, A′B′ de ces lignes, que nous savons demeurer constant.

1°. A cet effet, C étant le centre de courbure de la ligne AB pour le point A, décrivons du point C comme centre, et dans le plan osculateur en A, ACB, le petit arc de cercle $\widehat{A'b'}$ terminé à la droite CB prolongée, et joignons $B'b'$. On voit aisément que *la portion de normale principale*, AA′ ou BB′, *comprise entre les deux courbes, conserve une longueur constante*, que nous désignerons par la lettre n. Il en résulte que $\overline{BB'}$, $\overline{Bb'}$ ne diffèrent que d'un infiniment petit du second ordre; et que la droite $B'b'$, déjà située dans le plan normal en B et fai-

sant avec $\overline{Bb'}$ un angle infiniment peu différent d'un droit, peut être considérée comme perpendiculaire au plan osculateur ACB ou $A'Cb'$. Dès lors les triangles infinitésimaux $A'b'B'$, rectangle en b' et dans lequel l'angle en A' est égal à l'angle φ; $B'Bb'$ et $A'Cb'$, dont les angles en B et C représentent les angles de torsion et de contingence, H et E, de la ligne AB, nous donnent successivement :

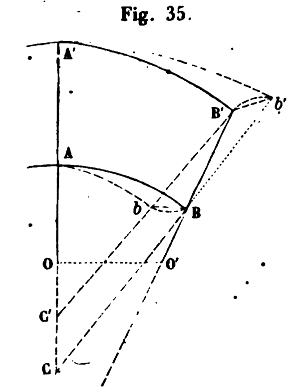


Fig. 35.

$$\tang\varphi = \frac{B'b'}{A'b'},$$

$$B'b' = H.\overline{BB'} = H.n,$$

$$\frac{1}{A'b'} = \frac{1}{E.\overline{CA'}} = \frac{1}{E(R_1 + n)}.$$

De là, en multipliant membre à membre et simplifiant,

$$\tang\varphi = \frac{H}{E}\cdot\frac{n}{R_1 + n} = \frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{n}{R_1 + n},$$

ou enfin

$$(2) \qquad \tang\varphi = \frac{\dfrac{n}{R_2}}{1 + \dfrac{n}{R_1}}.$$

2°. Effectuant ensuite une construction analogue au point C', centre de courbure de la ligne $A'B'$ pour le point A', les triangles infinitésimaux AbB, rectangle en b, et dans lequel l'angle en A est égal à l'angle φ; $BB'b$ et $AC'b$, dont les angles en B' et C' représentent les angles de torsion et de contingence, H' et E', de la ligne $A'B'$, nous donneront de même :

$$\tang\varphi = \frac{Bb}{Ab}, \quad Bb = H'.n, \quad \frac{1}{Ab} = \frac{1}{E'(R'_1 - n)};$$

d'où

$$(3) \qquad \tang\varphi = \frac{\dfrac{n}{R'_2}}{1 - \dfrac{n}{R'_1}};$$

et si l'on réunit les résultats précédents dans un même énoncé, on obtient cette proposition :

THÉORÈME XVIII. *Si les normales principales d'une ligne L sont en même temps les normales principales d'une seconde ligne L', 1° les tangentes menées en des points correspondants de ces lignes font entre elles un angle constant (φ); 2° il existe entre les rayons de première et de seconde courbure de ces lignes, pris isolément ou collectivement, les relations suivantes :*

$$(1) \qquad \tan\varphi = \frac{\frac{n}{R_2}}{1+\frac{n}{R_1}} = \frac{\frac{n}{R'_2}}{1-\frac{n}{R'_1}} = \frac{\frac{R'_2}{R'_1}-\frac{R_2}{R_1}}{1+\frac{R'_2}{R'_1}\cdot\frac{R_2}{R_1}},$$

φ et n désignant des constantes.

Observation. Les formules précédentes, ou du moins des formules équivalentes, ont été découvertes par M. Bertrand (voir *Journal de Mathématiques,* tome XV, page 332 ; 1850). On voit que la première de ces formules exprime que, *entre les deux courbures d'une ligne possédant la propriété énoncée, il existe une relation linéaire.* M. Bertrand écrit cette relation sous la forme

$$\frac{n}{R_1} - \frac{C}{R_2} = 1,$$

la constante C restant indéterminée, et sa signification géométrique demeurant inconnue. Les relations (1) permettent de lever cette indétermination, et donnent $C = \frac{n}{\tan\varphi}$ pour la valeur de cette constante.

COROLLAIRE. Si on suppose l'angle φ égal à un droit, les formules générales (1) se réduisent à celles-ci :

$$R_1 = -n, \quad R'_1 = n, \quad R_2R'_2 = n^2 :$$

relations déjà trouvées, dans l'un des numéros précédents, entre une ligne L dont la première courbure est constante, et la ligne L' lieu des centres de courbure de la première.

74. Théorème XIX. *Réciproquement, s'il existe entre les deux courbures d'une ligne* AB *une relation linéaire, on peut construire une seconde ligne* A'B' *ayant mêmes normales principales que la première; et il existe entre les rayons de courbure de ces lignes, outre la relation supposée, les autres relations exprimées par la formule* (1) *de la page précédente.*

Démonstration. Mettons la relation donnée sous cette forme :

$$(1)\qquad \frac{\frac{n}{R_2}}{1+\frac{n}{R_1}} = C = \text{constante},$$

et, la constante n étant, pour fixer les idées, supposée positive, portons *sur le prolongement* des rayons de courbure de la ligne AB ou L, à partir de cette courbe, des longueurs AA', BB',... égales à la ligne n : les points ainsi obtenus formeront une courbe A' B', ou L', située toute entière sur la surface gauche S formée par les normales principales de la courbe L, et coupant à angle droit les génératrices de cette surface. Or nous allons établir que la ligne L', ainsi définie, a mêmes normales principales que la ligne L.

Et d'abord, *les tangentes menées en des points correspondants* A *et* A' *des lignes* L *et* L', *font entre elles un angle constant, dont la tangente trigonométrique est précisément égale à la constante* C (*voir* la figure de la page 111).

Soient, en effet, O le point central de la génératrice AA'; $\overline{OO'}$ la plus courte distance entre $\overline{AA'}$ et la génératrice infiniment voisine BB'; Φ, Φ' les inclinaisons des plans tangents de la surface S en A, A' sur le plan tangent en O, inclinaisons mesurées par les angles que forment avec $\overline{OO'}$ les tangentes des lignes L, L' aux mêmes points; $\varphi = \Phi' - \Phi$ l'inclinaison mutuelle des plans tangents en A, A', ou des tangentes aux lignes L, L' aux mêmes points; et soit enfin k le coefficient de distribution des plans tangents de la surface S pour la génératrice AA'.

On a, comme on sait (*voir* page 10, n° 9),

$$\tang \Phi = k.\overline{oA}, \quad \tang \Phi' = k.\overline{oA'} = k(\overline{oA} + n);$$

d'où

$$\tang\varphi = \tang(\Phi' - \Phi) = \frac{k.n}{1 + k^2.oA.oA'} = \frac{k.n}{1 + k^2.\overline{oA}^2 + k^2.oA.n},$$

ou

$$(a) \qquad \tang\varphi = \frac{n.k}{1 + (k.oA)^2 + n.k.(k.oA)}.$$

D'un autre côté, Φ n'étant autre chose que l'inclinaison, sur le plan osculateur de la ligne AB, de la plus courte distance entre deux normales principales consécutives de cette ligne, on a (*voir* la formule 23, page 79),

$$\tang\Phi = \tang\theta = \frac{R_2}{R_1},$$

et, par suite,

$$(b) \qquad k.oA = \frac{R_2}{R_1};$$

enfin on a trouvé pour le coefficient k (*voir* la formule 24, page 81), l'expression

$$(c) \qquad k = \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1^2.R_2};$$

et si on remplace $k.oA$ et k par ces valeurs dans la formule (a), il vient

$$\tang\varphi = \frac{n.\dfrac{R_1^2 + R_2^2}{R_1^2 . R_2}}{1 + \left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^2 + n.\dfrac{R_2}{R_1}.\dfrac{R_1^2 + R_2^2}{R_1^2 . R_2}},$$

d'où, en réduisant au même dénominateur et simplifiant,

$$(2) \qquad \tang\varphi = \frac{\dfrac{n}{R_2}}{1 + \dfrac{n}{R_1}}.$$

Ainsi la tangente de l'angle φ a précisément pour valeur cette fonction des deux courbures de la ligne AB qui demeure cons-

tante d'après l'hypothèse exprimée par la relation (1); et, par suite, l'*angle* φ *est constant :* or ce résultat est suffisant pour établir que les droites AA′, BB′, . . . qui sont déjà les normales principales de la ligne AB, sont aussi les normales principales de la ligne A′B′ (*voir* la figure de la page 109).

Considérons, en effet, les indicatrices sphériques tt_1, $t't'_1$ des lignes AB, A′B′; et soit nn_1 la ligne sphérique formée par les extrémités des rayons *on* parallèles aux normales principales de la seule ligne AB, ou aux génératrices de la surface gauche déjà considérée. Les tangentes en A, A′ des lignes L, L′ étant toutes les deux perpendiculaires à la génératrice AA′, le rayon *on*, parallèle à cette dernière, est perpendiculaire au plan *tot′*; le point *n* est le pôle de l'arc de grand cercle *tt′*, et l'arc *nt* est perpendiculaire à l'arc *tt′*, qui demeure, par suite, toujours normal à la ligne tt_1 : cet arc *tt′* est d'ailleurs constant, puisqu'il mesure l'angle constant des tangentes aux lignes L, L′; on vient de voir qu'il demeure toujours normal à la ligne tt_1 décrite par son origine *t*, il demeure donc pareillement normal à la ligne $t't'_1$, décrite par son extrémité *t′*. Les indicatrices des lignes AB, A′B′ ont donc même développée sphérique; par suite *la ligne sphérique des normales principales*, nn_1, est la même pour les deux courbes AB, A′B′, et *les normales principales de ces courbes sont parallèles.* Enfin, la normale principale en chaque point A de la courbe AB passant constamment par le point correspondant A′ de la courbe A′B′, la normale principale de celle-ci, qui passe par le même point et qui est parallèle à la première, se confond avec elle; et *les deux courbes ont mêmes normales principales.*

75. Théorème XX. *Si les normales principales d'une ligne* L *sont en même temps normales principales de deux autres lignes distinctes*, L′ et L″, *chacune de ces lignes est une hélice tracée sur un cylindre de révolution; et la surface formée par leurs normales principales est un héliçoïde gauche à plan directeur.*

Démonstration. Désignons en effet par *n′* et *n″* les portions

constantes des génératrices de la surface gauche des normales, comprises entre la courbe L et chacune des courbes L′ et L″; par φ' et φ'' les angles *constants* des tangentes de la ligne L avec les tangentes correspondantes des lignes L′ et L″. En appliquant la première des relations contenues dans la formule (1) du n° 73 (*voir* page 112) à chacun des deux systèmes formés par les lignes L et L′, L et L″, on a

$$(1)\qquad \operatorname{tang}\varphi' = \frac{\frac{n'}{R_2}}{1+\frac{n'}{R_1}},$$

$$(2)\qquad \operatorname{tang}\varphi'' = \frac{\frac{n''}{R_2}}{1+\frac{n''}{R_1}};$$

et ces relations, n'étant autre chose que deux équations du premier degré entre $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ et des constantes, assignent à chacune des deux courbures de la ligne L une valeur constante: la ligne L est donc une hélice tracée sur un cylindre de révolution; il en est de même pour chacune des lignes L′ et L″, et la surface formée par les normales principales, communes à ces lignes, est un héliçoïde gauche à plan directeur.

Corollaire I. On déduit aisément des résultats qui précèdent, la démonstration du théorème suivant, établi d'abord par M. Catalan (*Journal de Mathématiques*, 1842, page 203):

Toute surface réglée dont les rayons de courbure sont en chaque point égaux et de signes contraires, est un héliçoïde gauche à plan directeur. On peut même donner plus de généralité à l'énoncé, en disant que: *S'il existe sur une surface gauche trois lignes* L, L′, L″ *coupant à angle droit les génératrices de la surface, et en chaque point desquelles les rayons de courbure de la surface soient égaux et de signes contraires, la surface est un héliçoïde gauche à plan directeur*.

Il suffit, en effet, pour démontrer cette dernière proposition,

de remarquer qu'en vertu de l'hypothèse, et d'après les théorèmes d'Euler et de Meunier, les plans osculateurs de chacune des lignes L, L′, L″, coïncident avec les plans tangents à la surface. Il en résulte que les normales principales de ces lignes coïncident avec les génératrices rectilignes de la surface : ces trois lignes ont donc mêmes normales principales ; chacune d'elles, d'après le théorème précédent, est une hélice appartenant à un cylindre de révolution ; et la surface est un héliçoïde gauche à plan directeur.

On trouve dans un Mémoire de M. O. Bonnet une démonstration analogue (*Journal de l'École Polytechnique*, 1848, page 134).

Corollaire II. Enfin le même théorème, combiné avec celui du numéro précédent, conduit à la séparation en trois classes, déjà établie par M. Bertrand, des surfaces gauches formées par les normales principales des lignes à double courbure : *La première classe renfermant les surfaces dont les génératrices sont les normales principales d'une courbe unique ; la seconde, les surfaces dont les génératrices sont les normales principales de deux courbes distinctes ; et la troisième enfin, les surfaces dont les génératrices sont les normales principales d'une infinité de courbes, cette dernière classe ne contenant que les héliçoïdes à plan directeur.* (*Journal de Mathématiques*, 1850, page 332.)

CHAPITRE VII.

DES LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE DE RÉVOLUTION. — SECTIONS PLANES. — LIGNES ET CERCLES GÉODÉSIQUES. — LOXODROMIES ET LIGNES D'OMBRE.

76. *L'équation en coordonnées polaires de la section méridienne d'une surface de révolution étant*

$$(1) \qquad f(\rho, \sin\omega) = 0,$$

l'équation de la section de cette surface par un plan incliné de l'angle α sur l'équateur, sera

(1) $$f(\rho', \sin\alpha . \sin\omega') = 0 :$$

l'origine des rayons vecteurs ρ et ρ' étant le point d'intersection du plan sécant et de l'axe; et les angles ω, ω' étant comptés, dans le plan méridien et dans le plan sécant, à partir des perpendiculaires à l'axe situées dans ces plans.

Applications. a). La surface considérée étant un *tore;* et le plan de la section, mené tangentiellement à la surface par la projection sur l'axe du centre de la section méridienne : on aura, au lieu des équations générales (I) et (1),

(I') $$\rho^2 - 2a\cos\omega . \rho + a^2\cos^2\alpha = 0,$$

(1') $$\rho'^2 - 2a\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\omega'} . \rho' + a^2\cos^2\alpha = 0.$$

Or cette dernière équation peut prendre, successivement, les formes suivantes :

$$\rho' = a\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\omega'} \pm \sqrt{a^2\sin^2\alpha - a^2\sin^2\alpha\sin^2\omega'}$$
$$= a\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\omega'} \pm a\sin\alpha\cos\omega',$$
$$(\rho' \mp a\sin\alpha\cos\omega')^2 = a^2(1-\sin^2\alpha\sin^2\omega'),$$
$$\rho'^2 \mp 2a\sin\alpha\cos\omega' . \rho' + a^2\sin^2\alpha - a^2 = 0;$$

et enfin

$$\rho'^2 \mp 2a\sin\alpha\cos\omega' . \rho' - a^2\cos^2\alpha = 0 :$$

équation du système de deux cercles, qui démontre le théorème de M. Yvon Villarceau.

b). Soient encore

(I'') $$\rho = \sqrt{\cos 2\omega} = \sqrt{1 - 2\sin^2\omega}$$

l'équation d'une lemniscate de Bernoulli, prise pour section méridienne d'une surface de révolution ; et

(1'') $$\rho' = \sqrt{1 - 2\sin^2\alpha\sin^2\omega'},$$

l'équation de la section de la surface par un plan passant par le centre de la lemniscate méridienne, et incliné de l'angle α sur

l'équateur. Si l'on pose $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, auquel cas l'angle α est de 45 degrés, et le plan de la section est tangent à la surface, comme dans le théorème précédent; il vient simplement

$$\rho' = \pm\sqrt{1 - \sin^2\omega} = \pm\cos\omega$$

pour équation de la section considérée, qui est encore le système de deux cercles. On peut d'ailleurs parvenir géométriquement à ce résultat en remarquant que la surface actuelle est la *réciproque*, relative à l'origine, d'un hyperboloïde de révolution à une nappe, lequel est coupé par le plan sécant considéré suivant deux génératrices rectilignes, parallèles entre elles, et ayant pour *réciproques* deux circonférences passant par l'origine, et mutuellement tangentes en ce point.

77. *Lignes géodésiques.* L'équation générale des lignes géodésiques d'une surface de révolution

$$(34) \qquad r\sin i = \text{constante},$$

déjà établie dans le chapitre VI, peut être obtenue plus simplement encore par la méthode de Maclaurin (*).

LEMME. *Parmi tous les triangles rectangles construits sur un côté* donné *de l'angle droit, celui pour lequel l'excès du temps employé à parcourir l'hypoténuse avec une vitesse donnée* v, *sur le temps employé à parcourir le second côté de l'angle droit avec une vitesse* v_1 *supérieure à* v, *est un minimum; — est celui dans lequel le sinus de l'inclinaison de l'hypoténuse, sur le côté* donné *de l'angle droit, est égal au rapport* $\frac{v}{v_1}$ *des vitesses données.* Et cette propriété de minimum subsiste encore, dans les mêmes conditions, pour des triangles curvilignes infiniment petits tracés sur une surface quelconque (*Des méthodes*, page 113).

Supposant ce Lemme établi, et remarquant que, *pour*

(*) Voir *Traité des Fluxions*, tome II, nos 572 et suiv.; et *des Méthodes Géométrie*, Mallet-Bachelier, 1855, page 112.

toutes les lignes réunissant le point A *au point* B, *la somme* $\int d\omega$ *des angles consécutifs formés par les méridiens qui aboutissent aux points successifs* A,... M, M'... B *de ces lignes, est constante;* on verra que la ligne géodésique cherchée, pour laquelle $\int MM'$ est minimum, coïncide avec la ligne pour laquelle la différence $\int MM' - \lambda \int d\omega$ est minimum, λ désignant un coefficient constant. D'ailleurs, cette différence totale sera rendue minimum, si l'on rend minimum chacune des différences élémentaires $MM' - \lambda . d\omega = MM' - \lambda . \frac{M'\mu'}{r}$, dont elle se compose : r désignant le rayon du parallèle du point M'; et $M'\mu'$ étant la projection sur ce parallèle de l'arc élémentaire MM' de la ligne considérée. Enfin, si l'on conçoit que la zone totale comprise entre les parallèles extrêmes ait été décomposée en un très-grand nombre de zones partielles par une série de parallèles intermédiaires, la série de ces parallèles étant la même pour toutes les lignes qui joignent le point A au point B : on pourra regarder comme *donné* l'arc $M\mu'$ de méridien compris entre les parallèles des points M, M'; et l'on verra dès lors que la différence élémentaire $MM' - \lambda \frac{M'\mu'}{r} = \frac{MM'}{1} - \frac{M'\mu'}{\frac{r}{\lambda}}$ sera minimum, d'après le Lemme, si l'inclinaison i de l'arc MM' sur le méridien est définie par l'équation

Fig. 36.

$$\sin i = \frac{1}{\frac{r}{\lambda}},$$

ou

$$r \sin i = \lambda = \text{constante}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque I. L'équation précédente s'applique encore d'une manière plus générale aux lignes géodésiques d'une classe de

surfaces, étudiées par Monge, et comprenant les surfaces de révolution : nous voulons parler des surfaces dont les lignes de première courbure sont planes et situées dans des plans parallèles. On sait que les lignes de seconde courbure de ces surfaces sont également planes, perpendiculaires aux plans des premières, et superposables entre elles : les lignes de première courbure, projetées sur le plan de l'une d'elles, ayant en outre même développée. Cela posé, *en chaque point d'une ligne géodésique d'une pareille surface, le rayon de courbure de la ligne de première courbure, et le sinus de l'inclinaison de la ligne géodésique sur la ligne de seconde courbure, sont les facteurs d'un produit qui demeure constant dans toute l'étendue de la ligne géodésique considérée.* La démonstration précédente s'applique, à peu près sans modification, à la proposition actuelle.

Remarque II. La même équation conduit encore à cette conséquence dont la démonstration est facile, et que nous nous contenterons d'énoncer : *Les côtés d'un triangle géodésique quelconque, tracé sur une surface de révolution, forment, avec les lignes méridiennes qui aboutissent aux trois sommets, six angles distincts; le produit des sinus de trois de ces angles, non adjacents, est égal au produit des sinus des trois autres.*

Remarque III. Enfin cette équation conduit encore à ce résultat qu'*une même ligne tracée sur une surface de révolution ne peut être à la fois une loxodromie et une ligne géodésique de la surface* : exception faite toutefois du cylindre parmi les surfaces de révolution, ainsi que de l'équateur et des sections méridiennes dans chaque surface. Il en résulte, sous les réserves mentionnées, cette généralisation d'une propriété *négative*, bien connue de la loxodromie sphérique : *quelle que fût la nature de la section méridienne du solide terrestre, supposé toujours de révolution, la ligne parcourue par un vaisseau qui suit constamment un même rumb de vent, oblique au méridien, ne saurait jamais être la ligne la plus courte entre le point de départ et le point d'arrivée.*

78. *Expression de l'angle de contingence géodésique d'une ligne quelconque.* Que l'on mène, par deux points infiniment voisins A et A′ d'une courbe quelconque tracée sur la surface de révolution, deux lignes géodésiques tangentes à cette courbe en ces points, se rencontrant en T, et formant en ce point un angle infiniment petit qui est, par définition, l'angle de contingence géodésique E_g relatif à l'arc AA′ de la courbe considérée. Si l'on mène le méridien du point T, et que l'on appelle i, I les inclinaisons de la première ligne géodésique sur les méridiens des points A, T, et i', I′ les inclinaisons de la seconde ligne géodésique sur les méridiens des points A′ et T; on aura, d'après le numéro précédent,

$$R\sin I = r\sin i, \quad R\sin I' = r'\sin i',$$

d'où

$$\frac{\sin I}{\sin I'} = \frac{r\sin i}{r'\sin i'},$$

r, r' et R désignant les rayons des parallèles passant par les points A, A′ et T. On déduit de la dernière relation, en remarquant que $I - I' = E_g$, et que les angles I, I′, i' et i sont infiniment peu différents les uns des autres, ainsi que les rayons r, r' et R,

$$\frac{\sin I - \sin I'}{\sin I'} = \frac{r\sin i - r'\sin i'}{r'\sin i'}, \quad E_g \cdot \frac{\cos\frac{I+I'}{2}}{\sin I'} = \frac{-d(r\sin i)}{r'\sin i'};$$

et enfin

$$(33\ bis) \qquad E_g = -\frac{d(r\sin i)}{r\cos i}.$$

Le problème suivant va nous offrir une application de cette formule.

79. Problème. *Parmi les lignes, de longueur donnée, qui sur une surface de révolution réunissent deux points donnés, trouver celle qui enveloppe une aire maximum.*

Solution. Imaginons que la zone totale comprise entre les parallèles des points extrêmes A et B ait été décomposée en un très-grand nombre de zones partielles, par une série

de parallèles intermédiaires, la série de ces parallèles étant la même pour toutes les lignes qui joignent ces deux points : et soit AMM′B la ligne cherchée (*fig.* 28). Cette ligne étant de longueur donnée, renfermant une aire maximum, et réunissant deux points appartenant à des méridiens dont l'angle est donné ; l'intégrale

$$\int (dS - \lambda R . d\omega + \mu . d\omega)$$

sera minimum pour la ligne cherchée : en désignant par $R d\omega$ l'aire élémentaire $MM'm'm$ comprise entre cette ligne, deux méridiens consécutifs et le parallèle initial Aa, dont on peut prendre le rayon pour unité ; R étant une fonction du rayon du parallèle passant par le point M, indépendante de l'angle ω, et dont la forme dépend de la nature de la section méridienne. Or, on rendra cette intégrale minimum, en rendant minimum chacun de ses éléments

$$dS - (\lambda R - \mu) d\omega,$$

ou

$$MM' - \frac{\lambda R - \mu}{r} . M'\mu' ;$$

ou

$$MM' - \frac{\frac{M'\mu'}{r}}{\lambda R - \mu} ;$$

et comme l'arc $M\mu'$ de méridien compris entre les parallèles des points M et M′ peut être regardé comme donné, cette dernière différence sera minimum, d'après le Lemme, si l'inclinaison i de l'arc MM′ sur le méridien est définie par l'équation

$$\sin i = \frac{1}{\frac{r}{\lambda R - \mu}} = \frac{\lambda R - \mu}{r},$$

ou

$$(x) \qquad \lambda R = \mu + r \sin i.$$

Différentiant cette équation, et remarquant que,

$$dR = \frac{\text{aire } M\mu M'\mu'}{d\omega} = \frac{r d\omega . d\sigma}{d\omega} = r d\sigma,$$

$d\sigma$ désignant l'arc correspondant $M\mu'$ du méridien, il vient, successivement,

$$\lambda . r d\sigma = d(r \sin i),\quad \lambda . r \cos i . dS = d(r \sin i),$$

$$(x')\qquad dS = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{d(r \sin i)}{r \cos i}:$$

d'où, en divisant par l'équation (33 *bis*) de la page 122,

$$(x'')\qquad \frac{dS}{E_g} = \frac{1}{\lambda} = \text{constante};$$

ce qui démontre que *la courbure géodésique de la ligne cherchée est constante;* et ce résultat, comme on sait, demeure vrai pour une surface quelconque.

80. *Des loxodromies.* Si rapportant chaque point d'une surface de révolution à un parallèle et à un méridien fixes ox et oy, on désigne par y l'arc du méridien passant par ce point terminé au premier parallèle, et par x l'arc du parallèle passant par le même point et terminé au premier méridien, on trouvera immédiatement

$$dx = \operatorname{tang} i . dy,$$

et

$$(3)\qquad x = y . \operatorname{tang} i$$

pour équation d'une loxodromie passant par l'origine des coordonnées. L'aire interceptée entre le premier méridien, la trajectoire et un parallèle quelconque, a pour différentielle, dans le même système,

$$x dy = \operatorname{tang} i . y dy;$$

et l'on en déduit, pour l'aire elle-même,

$$(4)\qquad u = \frac{1}{2} y^2 . \operatorname{tang} i.$$

De la forme de l'équation (3) il résulte, ainsi que l'a fait remarquer M. l'abbé Aoust (*Journal de Mathématiques*, tome XI, 1846, page 184), que la loxodromie joue, sur une

surface de révolution, le même rôle que la ligne droite dans le plan. En particularisant cette observation générale, on parvient aux résultats suivants :

1. *Les loxodromies issues d'un même point de la surface déterminent sur un parallèle quelconque des arcs proportionnels.*

2. *Les sommets d'un triangle variable, formé par des loxodromies, glissant sur trois parallèles donnés, et les deux premiers côtés tournant autour de deux points donnés, le troisième côté, ou côté libre, passe continuellement par un troisième point fixe.*

81. *Rayon de courbure géodésique d'une loxodromie.* Nous avons trouvé dans le chapitre précédent [*voir* page 95, formule (33)], pour l'angle de contingence géodésique d'une ligne quelconque tracée sur une surface de révolution,

$$E_g = E \cos a = di \pm \cos\theta . d\omega :$$

cette équation devient, en supposant que la ligne considérée soit une loxodromie, et négligeant les signes,

$$E_g = \cos\theta . d\omega,$$

d'où

$$R_{1,g} = \frac{dS}{E_g} = \frac{dS}{\cos\theta . d\omega}.$$

On a d'ailleurs

$$dS = \frac{r\,d\omega}{\sin i};$$

r désignant le rayon du parallèle passant par le point considéré; et si l'on substitue cette valeur dans la formule précédente, il vient

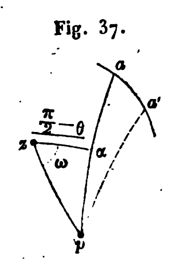
$$(35) \qquad R_{1,g} = \frac{1}{\sin i} \cdot \frac{r}{\cos\theta},$$

pour le rayon de première courbure géodésique d'une loxodromie : cette formule renferme celle qui a été établie précédemment pour la loxodromie sphérique.

82. *Des lignes d'ombre, relatives à des rayons incidents parallèles.*

a). Recourant au mode de représentation sphérique des lignes tracées sur une surface de révolution déjà employé dans le chapitre VI, considérons l'indicatrice sphérique aa' d'une ligne d'ombre AA', et soient z, p les extrémités des rayons de la sphère parallèles à l'axe de la surface et à la direction des rayons lumineux incidents; menons les arcs de grand cercle zp, pa, pa' qui représentent, le premier, le plan de la *section méridienne principale*, parallèle aux rayons incidents; le second et le troisième, les plans tangents en A et A'; abaissons enfin perpendiculairement sur pa l'arc $z\alpha$, dont le plan est parallèle au plan de la section méridienne en A, et qui mesure le complément de l'inclinaison θ de la tangente en A de cette section sur le rayon du parallèle correspondant.

Fig. 37.



Le triangle sphérique rectangle $z\alpha p$ donne

$$\cos\omega = \cot zp \,.\, \tang z\alpha = \cot zp \,.\, \cot\theta,$$

ou

$$(6) \qquad \cos\omega = m\cot\theta;$$

m désignant une constante, et ω représentant l'inclinaison du plan de la section méridienne, qui passe par le point A de la ligne d'ombre considérée, sur le plan de la section principale. On déduit facilement de cette formule, comme nous allons le voir, les équations des projections de la ligne d'ombre sur le plan de la section méridienne principale et sur un plan perpendiculaire à l'axe. Soit d'abord, à cet effet,

$$(\text{VII}) \qquad f(r, \cot\theta) = 0$$

l'équation de la section méridienne, entre les coordonnées particulières r et θ, dont la première désigne le rayon du parallèle : si on élimine θ entre les équations (6) et (VII), on aura, *pour la*

projection d'une ligne d'ombre sur le plan de l'équateur,

$$(7) \qquad f\left(r, \frac{\cos\omega}{m}\right) = 0.$$

En second lieu, l'équation (VII) de la section méridienne principale pouvant s'écrire

$$(\text{VII}') \qquad f\left(r, \frac{dr}{dz}\right) = 0,$$

si on élimine r entre cette équation et la suivante

$$r' = r\cos\omega = r.m\cot\theta = r.m\frac{dr}{dz},$$

ou

$$(7') \qquad r' = m.\frac{rdr}{dz};$$

l'équation résultante en r' et z représentera *la projection de la ligne d'ombre sur le plan de la section méridienne principale :* les coordonnées z et r' étant comptées, la première parallèlement à l'axe de la surface, et la seconde perpendiculairement à cet axe.

83. *Application.* Théorème. *Toute surface de révolution qui admet une ligne d'ombre* plane *est nécessairement une surface du second degré.* (De la Gournerie, *Journal de l'École Polytechnique.*)

Démonstration. Le plan de la ligne d'ombre considérée devant être, à cause de la symétrie, perpendiculaire au plan de la section principale, la projection de cette ligne sur ce plan sera une ligne droite dont l'équation pourra s'écrire, en disposant convenablement de l'origine,

$$r' = az,$$

et si l'on porte cette valeur dans l'équation (7'), il vient, pour l'équation différentielle de la section méridienne,

$$a.zdz = m.rdr,$$

d'où, pour la section méridienne elle-même,

$$az^2 = m \cdot r^2 + C:$$

équation d'une courbe du second degré, dont l'un des axes coïncide avec l'axe de la surface.

84. On peut, dans certains cas, reconnaître d'une manière très-simple, et sans aucun calcul, la nature des projections sur le plan de l'équateur, des diverses lignes d'ombre d'une surface de révolution.

Imaginons, en effet, deux surfaces de révolution, construites sur le même axe, et ayant pour section méridienne deux courbes *égales* dont on pourrait effectuer la superposition à l'aide d'un mouvement de translation, dirigé perpendiculairement à l'axe, que l'on attribuerait à l'une d'elles. Si l'on appelle *points correspondants* de deux pareilles surfaces les points de ces surfaces situés sur un même rayon perpendiculaire à l'axe, il est évident que les plans tangents en des points correspondants de ces surfaces sont toujours parallèles : et il résulte, en général, de ce parallélisme que *les lignes d'ombre des deux surfaces, relatives à une même direction des rayons incidents, sont deux lignes correspondantes.* Si l'on suppose, en particulier, que la première des deux surfaces considérées soit un paraboloïde de révolution, ou une sphère, on obtiendra les résultats suivants :

1. *Dans la surface de révolution engendrée par la rotation d'une parabole autour de l'un quelconque de ses diamètres, les lignes d'ombre relatives à des rayons incidents parallèles se projettent, sur un plan perpendiculaire à l'axe, suivant des conchoïdes.*

2. *Les lignes d'ombre du tore, projetées sur le plan de l'équateur, donnent naissance à des conchoïdes à base elliptique, que l'on peut construire en prolongeant, d'une longueur constante, les demi-diamètres d'une ellipse ayant pour centre le pied de l'axe sur l'équateur.*

CHAPITRE VIII.

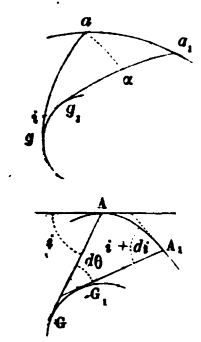
DES LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE DÉVELOPPABLE.

---

85. **Lemme.** ***Le rayon de courbure géodésique,*** $R_{1,g} = \frac{R_1}{\cos a}$, ***d'une ligne tracée sur une surface est égal au rayon de courbure ordinaire,*** R', ***de la courbe plane suivant laquelle elle se transforme par le développement, sur un plan, de la surface développable circonscrite à la proposée suivant cette ligne.***

Démonstration. Construisons l'indicatrice sphérique aa_1 de la ligne considérée AA_1, et menons par le centre de la sphère des rayons og, og_1 parallèles aux génératrices AG, A_1G_1 de la surface développable. Les arcs de grand cercle $\widehat{ga}$, $\widehat{g_1a_1}$, se coupant en i, seront parallèles aux plans tangents en A, A_1 de cette surface; ils seront tangents en outre à la ligne gg_1 : car cette dernière n'est autre que l'indicatrice de l'arête de rebroussement de la surface développable; et l'on sait que les plans tangents de l'une coïncident avec les plans osculateurs de l'autre. Dès lors, en posant

Fig. 38.



$aa_1 = E$, $gg_1 = \overline{AG}, \overline{A_1G_1} = d\theta$, $\widehat{ag} = i$, $\widehat{a_1g_1} = i + di$, et décrivant du point i, comme pôle, l'arc de petit cercle $a\alpha$, on trouve

$$\widehat{\alpha a_1} = \widehat{aa_1} . \cos a,$$

ou

$$di + d\theta = E\cos a;$$

d'où

$$\frac{dS}{E\cos a} = \frac{R_1}{\cos a} = \frac{dS}{di + d\theta}.$$

Ainsi,

$$\frac{R_1}{\cos a} = \frac{dS}{di + d\theta};$$

$\widehat{a}$ désignant l'angle sous lequel l'arc $\widehat{ga}$ coupe la ligne aa_1, ou l'inclinaison du plan tangent en A sur le plan osculateur de la ligne AA_1. Or, si l'on développe sur un plan la surface AGG_1A_1; dS, di et $d\theta$ ne changent pas de valeurs; $di+d\theta$ représente l'angle de contingence E' de la ligne AA_1 transformée, et la formule précédente devient

$$\frac{R_1}{\cos a} = \frac{dS'}{E'} = R'. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

86. *Formules relatives aux courbes tracées sur un cylindre.*

AA_1 étant une courbe quelconque tracée sur un cylindre, désignons par i et a les angles que la tangente et le plan osculateur de cette courbe en A forment respectivement avec la génératrice et le plan tangent du cylindre au même point; par $i+di$, $a+da$ les grandeurs analogues pour le point A_1; et soient ρ et $d\omega$ le rayon de courbure de la section droite du cylindre en A, et l'angle des plans tangents en A, A_1 : dS désignant l'arc élémentaire de la courbe AA_1, on aura d'abord

$$(a) \qquad d\omega = \frac{dS.\sin i}{\rho}.$$

Si l'on construit ensuite l'indicatrice sphérique aa_1 de la courbe AA_1, et si ayant mené le rayon og de la sphère parallèle aux génératrices du cylindre, de son extrémité g, comme pôle, on décrit l'arc de petit cercle $a\alpha$, terminé aux arcs de grand cercle ga, ga_1; le triangle rectangle $a\alpha a_1$ fournira les relations

Fig. 39.

$$\sin a = \frac{\sin i.d\omega}{E}, \quad \cos a = -\frac{di}{E},$$

et si l'on remplace $d\omega$ par sa valeur (a), il vient

$$(36) \qquad \sin a = \frac{R_1.\sin^2 i}{\rho},$$

$$(37) \qquad \cos a = -\frac{di}{E}, \quad \text{ou} \quad E_g = -di.$$

On a d'ailleurs,

$$(38)\qquad \operatorname{tang} i = \frac{\mathrm{E}\sin a}{\mathrm{H}+da},$$

en remarquant que l'intersection des plans tangents menés par les points A, A_1 a pour limite la génératrice du point A, et appliquant la formule (14) sur les enveloppes sphériques, obtenue à la page 49; et si l'on multiplie membre à membre les relations (36), (38), on trouve, en simplifiant,

$$\frac{1}{\cos i} = \frac{\mathrm{R}_1.\mathrm{E}.\sin i}{\rho(\mathrm{H}+da)} = \frac{d\mathrm{S}}{\mathrm{H}_g}\cdot\frac{\sin i}{\rho};$$

ou

$$(39)\qquad \mathrm{R}_{2,g} = \frac{\rho}{\sin i.\cos i},$$

pour le rayon de *seconde courbure géodésique* de la courbe considérée.

Enfin, si l'on abaisse l'arc $gp = p = \frac{\pi}{2} - \varpi$ perpendiculaire sur le grand cercle tangent en a à la ligne aa_1, la tangente trigonométrique du rayon de courbure sphérique de l'indicatrice aa_1, ou le rapport $\frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1}$ des deux courbures de la courbe primitive AA_1, a pour valeur $\left(\frac{\sin\rho.d\rho}{d.\sin p}\right.$, ou, suivant la notation actuelle$\left.\right)$ $\frac{-\sin i.di}{d.\sin p} = \frac{d.\cos i}{d.\cos\varpi}$, d'après la formule (9″) de la page 42; de sorte que l'on a

$$(\mathrm{F})\qquad \frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{R}_1} = \frac{d.\cos i}{d.\cos\varpi}.$$

Cette élégante formule, déjà obtenue par M. J.-A. Serret, fait voir que *le rapport de la première à la seconde courbure d'une ligne quelconque est mesuré par le rapport des différentielles des cosinus des angles que forment, avec une même direction fixe, la tangente de la courbe considérée et la droite polaire correspondante.* (*Journal de Mathématiques*, 1851, t. XVI, p. 195.)

Si l'on pose (40) $\rho =$ constante, ou si l'on suppose le cylindre de révolution, et qu'ayant différentié l'équation (36), on remplace dans l'équation résultante di et da par les valeurs $-\mathrm{E}\cos a$ et $\frac{\mathrm{E}\sin a - \mathrm{H}\,\mathrm{tang}\, i}{\mathrm{tang}\, i}$ tirées des relations (37) et (38), on trouve, après quelques transformations, cette dernière formule

$$(40) \qquad \frac{d\mathrm{R}_1}{d\mathrm{S}} = \frac{\cos a}{\sin^2 i}\left\{\frac{\rho}{\mathrm{R}_2} - 3\sin i \cos i\right\}.$$

Observation. Il convient de remarquer que les arcs ga de la figure sphérique actuelle doivent aller en décroissant, quand on passe de a en a_1 sur la ligne sphérique aa_1; ou, en d'autres termes, que la différentielle di doit être négative. Cette condition, en effet, était remplie par la figure 20 de la page 49, sur laquelle nous avons obtenu la formule (38), $\mathrm{tang}\, i = \frac{\mathrm{E}\sin a}{\mathrm{H} + da}$, et l'on reconnaît aisément que cette dernière devrait être écrite $\mathrm{tang}\, i = \frac{\mathrm{E}\sin a}{\mathrm{H} - da}$ si l'on supposait positive la différentielle di.

Remarque. L'arc de grand cercle tangent en un point quelconque a de l'indicatrice représentant le plan osculateur de la ligne cylindrique considérée, et l'arc $\widehat{ga}$ qui joint le point g au même point a représentant le plan tangent au cylindre; on voit que si l'indicatrice sphérique passe par le point g, le plan osculateur au point correspondant de la ligne primitive et le plan tangent du cylindre qui la contient, au même point, feront un seul et même plan. Donc, *si la tangente en un point d'une courbe de l'espace est perpendiculaire au plan de projection* (et dans ce cas la courbe est tangente en ce point à la génératrice du cylindre projetant), *la tangente au point correspondant de sa projection sera la trace sur le plan de projection du plan osculateur de la courbe primitive au point considéré :* proposition due à M. Chasles; ramenant, comme on le voit, la construction de la tangente de la projection d'une courbe, au point où l'élément de la courbe est perpendiculaire au plan de projection, à la détermination du plan osculateur de la ligne

que l'on projette; et donnant, par cette réduction même, l'explication de l'inefficacité des méthodes ordinaires, dans le cas particulier en question. (Voyez *Journal de Mathématiques*, 1837, tome II, page 293.)

Applications.

87. *Posons $i =$ constante :* la courbe AA_1 devient une *hélice*, la formule (37) montre que $a = \frac{\pi}{2}$, les formules (36) et (38) donnent

$$R_1 = \frac{\rho}{\sin^2 i}, \quad \frac{R_2}{R_1} = \tang i = \text{constante};$$

et l'on voit que, si le cylindre est de révolution, R_1 et R_2 sont séparément constants.

88. *Posons $\rho =$ constante et $a =$ constante,* c'est-à-dire proposons-nous de définir, sur un cylindre de révolution, la courbe dont le plan osculateur coupe la surface sous un angle constant.

L'équation (36) résolue par rapport à R_1, et divisée par $\cos a$, donne

$$\frac{R_1}{\cos a} = \frac{\rho \tang a}{\sin^2 i},$$

ou

$$R' = \frac{\rho . \tang a}{\sin^2 i} = \frac{C}{\sin^2 i},$$

C désignant une constante, et R' représentant (Lemme, page 129) le rayon de courbure de la ligne suivant laquelle se transforme la courbe cherchée par le développement du cylindre. On déduit aisément de cette formule que la ligne transformée est une chaînette, dont l'axe est parallèle aux génératrices du cylindre; et comme cette dernière ligne est aussi la transformée de la *chaînette cylindrique* (Vieille, *Compléments d'Analyse et de Mécanique*, page 202), on voit que *la courbe cherchée est la chaînette cylindrique*. On a d'ailleurs ces expressions des rayons de courbure de la ligne, en chacun de

ses points,

$$R_1 = \frac{\rho \sin a}{\sin^2 i}, \quad R_2 = \frac{\rho}{\sin i . \cos i},$$

et ces formules s'appliquent encore, non plus à la chaînette, mais à la courbe $a =$ *constante*, dans le cas où le cylindre est quelconque.

89. *Posons* $\rho =$ *constante et* $R_1 =$ *constante* : la formule (40), dans laquelle nous ferons abstraction de la solution $\cos a = 0$, ou $a = \frac{\pi}{2}$, qui reproduirait l'hélice déjà considérée au n° 87, devient alors

$$R_2 = \frac{dS}{H} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\rho}{\sin i . \cos i}.$$

On a d'ailleurs, suivant la formule (39),

$$R_{2,g} = \frac{dS}{H + da} = \frac{\rho}{\sin i . \cos i},$$

et il résulte de la comparaison de ces formules que : *sur un cylindre de révolution, l'angle de torsion de la ligne dont la première courbure est constante, est proportionnel à la variation correspondante de l'inclinaison du plan osculateur de cette ligne sur le plan tangent à la surface.*

90. *Formules relatives aux courbes tracées sur un cône.* Soient aa_1 l'indicatrice sphérique de la courbe AA_1, et gg_1 la ligne formée par les extrémités des rayons de la sphère parallèles aux génératrices oA, oA_1 du cône; menons les arcs de grand cercle ga, g_1a_1, qui se coupent en i, et décrivons du point i, comme pôle, l'arc $a\alpha$. Conservant les notations du numéro précédent, et désignant, en outre, par r la longueur oA, par $d\theta$ l'angle des génératrices consécutives oA, oA_1 (mesuré sur la sphère par l'arc gg_1) et par A le demi-angle au sommet du cône de révolution, osculateur du cône proposé suivant la génératrice oA (l'angle A étant mesuré sur la sphère par le rayon de courbure sphérique de la ligne gg_1 en g) : nous aurons

d'abord

$$(a) \qquad d\theta = \frac{dS . \sin i}{r},$$

$$(b) \qquad d\omega = d\theta . \cot A = \frac{dS . \sin i}{r} \cot A.$$

Le triangle rectangle $a\alpha a_1$ nous fournira ensuite les relations

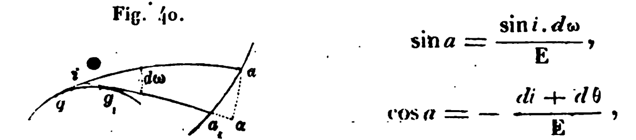


Fig. 40.

$$\sin a = \frac{\sin i . d\omega}{E},$$

$$\cos a = -\frac{di + d\theta}{E},$$

qui deviennent, par l'emploi des formules (a) et (b),

$$(36') \qquad \sin a = \frac{R_1 . \sin^2 i}{r \operatorname{tang} A},$$

$$(37') \qquad \begin{cases} \cos a = -\dfrac{dS . \sin i + r . di}{E . r}, \\ \text{ou} \\ E_g = -\left(\dfrac{dS . \sin i}{r} + di\right). \end{cases}$$

On a d'ailleurs

$$(38') \qquad \operatorname{tang} i = \frac{E . \sin a}{H + da},$$

comme dans le n° 86; et si l'on multiplie membre à membre les formules (36′) et (38′), on trouve, en simplifiant,

$$(39') \qquad R_{2,g} = \frac{r \operatorname{tang} A}{\sin i . \cos i}.$$

Les formules correspondantes du n° 86 se déduisent de celles-ci en posant $\operatorname{tang} A = 0$, $r = \infty$ et $r \operatorname{tang} A = \rho$.

Applications.

91. *Posons $A =$ constante et $i =$ constante :* la courbe considérée est une hélice tracée sur une cône de révolution ; les équations (36′) et (37′), divisées membre à membre, four-

nissent la relation

$$\tang a = \frac{\sin i}{\tang A},$$

d'après laquelle l'angle a demeure constant; et C, C′ désignant des constantes, les formules (36′) et (38′) prennent cette forme

$$R_1 = C.r, \quad \frac{R_2}{R_1} = C'.$$

Il résulte, de cette dernière, que la courbe considérée est en même temps une *hélice cylindrique;* et il est aisé de voir que les génératrices du cylindre, à base spirale, qui la contient, sont parallèles à l'axe du cône; car l'indicatrice sphérique aa_1 et la courbe gg_1 sont deux cercles ayant même pôle.

92. *Posons* $a = \frac{\pi}{2}$: la courbe est une ligne géodésique, et l'on obtient des expressions très-simples de $\sin i$, R_1 et R_2 en fonction de r et de $\tang A$.

93. *Posons* A = *constante et* a = *constante* : l'équation (36′), résolue par rapport à R_1 et divisée par $\cos a$, donne

$$R' = C.\frac{r}{\sin^2 i}$$

pour le rayon de courbure de la ligne suivant laquelle se transforme la courbe cherchée par le développement du cône. De là, en désignant par p la perpendiculaire abaissée de l'origine des rayons vecteurs sur la tangente, et remarquant que $\sin i = \frac{p}{r}$, que $R' = \frac{rdr}{dp}$, on tire, successivement,

$$\frac{dr}{r^2} = \frac{Cdp}{p^2}, \quad \frac{1}{r} = \frac{C}{p} + C', \quad p = \frac{Cr}{1 - C'r};$$

d'où l'on pourra déduire l'équation en coordonnées polaires de la courbe transformée : équation qui se présente sous des formes différentes, suivant que C est inférieur, égal ou supérieur à l'unité.

94. *Scolie.* On pourrait se proposer de déterminer l'équation générale des lignes tracées sur un cylindre, ou sur un cône de révolution, analogue à l'équation

$$R_1^2 + R_2^2 \left(\frac{dR_1}{dS}\right)^2 = \text{constante},$$

qui représente une ligne sphérique. Mais cette recherche, qui présente d'ailleurs des difficultés, pourra-t-elle du moins conduire à un résultat simple? Il est aisé de voir que non, et de définir les lignes et les rapports différentiels qui entreraient dans l'expression du rayon du cylindre, ou de l'angle au sommet du cône de révolution, contenant la ligne considérée. En effet, *quatre* points sont nécessaires pour déterminer une sphère, *cinq* pour un cylindre et *six* pour un cône de révolution : le rayon de la sphère osculatrice, le rayon du cylindre et l'angle au sommet du cône, *osculateurs* d'une ligne à double courbure en un de ses points, dépendent donc, implicitement, des lignes finies et des rapports différentiels qui naissent de la considération simultanée et de la succession de *quatre*, de *cinq* ou de *six* points *infiniment voisins* d'une ligne à double courbure.

Pour le cas de la sphère, le nombre des points est *quatre* : les trois premiers donnent naissance au rayon de première courbure ; la succession des quatre points donne naissance au rayon de seconde courbure et au rapport différentiel $\frac{dR_1}{dS}$: le rayon de la sphère osculatrice est donc une fonction de R_1, R_2, $\frac{dR_1}{dS}$.

Pour le cas du cylindre, le nombre de points est *cinq* : les quatre premiers donnent naissance aux grandeurs R_1, R_2, $\frac{dR_1}{dS}$; et la succession des cinq points introduit, en outre, les rapports $\frac{dR_2}{dS}$, $\frac{d^2R_1}{dS^2}$: le rayon du cylindre osculateur est donc une fonction des quantités R_1, R_2, $\frac{dR_1}{dS}$, $\frac{dR_2}{dS}$, $\frac{d^2R_1}{dS^2}$.

Enfin, on verra de même que l'angle au sommet du cône

droit osculateur est une fonction des mêmes quantités, et des nouveaux rapports $\frac{d^2 R_2}{dS^2}$, $\frac{d^3 R_1}{dS^3}$.

95. *Formules relatives aux courbes tracées sur une surface développable.*

Les formules établies dans le n° 90 s'appliquent, avec une seule modification, aux courbes tracées sur une surface développable quelconque. Il suffit, en effet, d'y remplacer tang A, qui représentait le rayon de courbure géodésique de la ligne sphérique formée par les extrémités des rayons parallèles aux génératrices du cône, par le rayon de courbure géodésique analogue relatif à la ligne sphérique formée par les extrémités des rayons parallèles aux génératrices de la surface développable considérée. Or, cette dernière ligne est précisément l'indicatrice sphérique de l'arête de rebroussement de la surface, et son rayon de courbure géodésique tang A est égal à $\frac{\rho_2}{\rho_1}$; ρ_1 et ρ_2 désignant les rayons de première et de seconde courbure de cette arête. On a donc les formules suivantes :

(36″) $$\sin a = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{R_1 \sin^2 i}{r},$$

(37″) $$\cos a = -\frac{dS.\sin i + r.di}{E.r} \quad \text{ou} \quad E_g = -\left(\frac{dS.\sin i}{r} + di\right),$$

(36-37″) $$\tang a = -\frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{dS.\sin^2 i}{dS.\sin i + r.di},$$

(38″) $$\tang i = \frac{E \sin a}{H + da},$$

(39″) $$R_{2,g} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{r}{\sin i.\cos i}.$$

Applications.

96. *Posons* $\frac{\rho_2}{\rho_1} =$ *constante et* $i =$ *constante :* les formules (36-37″) et (38″) montrent que l'angle a et le rapport

$\frac{R_2}{R_1}$ sont constants; et R_1, R_2 sont proportionnels à r. Donc, *les trajectoires des génératrices rectilignes d'un héliçoïde développable sont des hélices, et leurs plans osculateurs coupent la surface sous un angle constant.* On voit d'ailleurs qu'il est nécessaire, pour que i et a soient simultanément constants, que $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ le soit aussi, ou que la surface soit un héliçoïde.

97. *Posons* $a = \frac{\pi}{2}$: la formule (38″) devient

$$\tang i = \frac{E}{H} \quad \text{ou} \quad \tang i = \frac{R_2}{R_1}.$$

Il en résulte que : *en chaque point d'une ligne géodésique tracée sur une surface développable, le rapport de la première à la seconde courbure de cette ligne est égal à la tangente de son inclinaison sur la génératrice correspondante de la surface.*

98. *Posons* $\frac{\rho_2}{\rho_1} =$ *constante et* $i = \frac{\pi}{2}$: on a, comme précédemment,

$$a = \text{constante} \quad \text{ou} \quad da = 0.$$

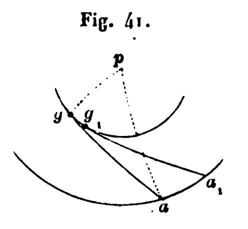
La formule (38″) donne d'ailleurs $H + da = 0$; donc $H = 0$, et la ligne considérée est *plane*. Réciproquement, *si l'on a* $i = \frac{\pi}{2}$ *et* $H = 0$, on a encore $da = 0$, $a =$ constante. Donc, *les lignes de courbure d'un héliçoïde développable sont planes; et toute surface développable dont les lignes de courbure sont planes est un héliçoïde.* (*Voir* le n° 96.)

99. *Si une surface développable a des cercles pour lignes de courbure, cette surface est un cône de révolution.* En effet, i, a et $\frac{dS}{E}$ étant constants par suite de l'hypothèse, l'équation (37″) se réduit à $r =$ constante, ce qui suffit pour établir que la surface est un cône, et par suite un cône de révolution. Car les rayons $\bar{r}$ ayant une longueur constante et étant nor-

maux, par une de leurs extrémités, à la ligne de courbure AA_1, ces rayons devraient être également normaux à la courbe formée par leurs autres extrémités. Mais ces rayons sont déjà tangents à cette courbe, qui est l'arête de rebroussement; donc celle-ci se réduit à un point, et la surface est un cône de révolution.

100. *Observation.* — *Les trajectoires des génératrices rectilignes d'un héliçoïde développable sont des hélices.* Cette proposition, que nous avons vue résulter des formules précédentes, peut être établie directement en quelques mots. Il suffit, en effet, de remarquer que l'indicatrice sphérique d'une trajectoire peut se construire par points, en menant des arcs de grand cercle tangents au petit cercle gg_1 de la sphère, qui sert d'indicatrice à l'arête de rebroussement de la surface, et prenant sur chacun d'eux un arc constant $ga = i$. Or le lieu des points ainsi obtenus est évidemment un petit cercle aa_1 de la sphère, parallèle au cercle gg_1 et de même pôle; donc la trajectoire considérée est une hélice cylindrique, et le cylindre auquel elle appartient est parallèle au cylindre contenant l'arête de rebroussement de la surface. On voit d'ailleurs que l'arc de grand cercle ga, tangent au premier cercle gg_1 et limité au second aa_1, coupe ce dernier sous un angle qui reste constant; donc *le plan osculateur d'une trajectoire quelconque coupe la surface sous un angle constant.* Réciproquement, *toute hélice tracée sur un héliçoïde développable, et appartenant à un cylindre parallèle à celui qui contient l'arête de rebroussement de la surface, est une trajectoire des génératrices rectilignes de l'héliçoïde.* Car p étant le pôle commun des petits cercles gg_1 et aa_1 qui servent d'indicatrices à l'arête de rebroussement et à l'hélice considérée, les côtés pg et pa du triangle sphérique pga, rectangle en g, sont constants; il en résulte que le troisième côté ga est constant aussi, et que

Fig. 41.



l'hélice considérée est une trajectoire des génératrices rectilignes.

Si l'hélice, arête de rebroussement de la surface, appartient à un cylindre de révolution, les mêmes conséquences subsisteront encore; mais avec cette particularité que *l'une des trajectoires*, en nombre infini, qui correspondent à une valeur déterminée, et d'ailleurs quelconque, de l'angle *i*, *est une hélice tracée sur un cylindre de révolution.* Dans ce cas, en effet, si on développe la surface sur un plan, l'arête de rebroussement, dont la première courbure est constante, devient une circonférence; les génératrices de la surface se transforment suivant les tangentes de cette circonférence, et leurs trajectoires suivant les trajectoires des tangentes. Or, dans la figure ainsi développée, l'une des trajectoires, en nombre infini, qui correspondent à une valeur donnée de l'angle i, est une circonférence (décrite du même centre que la première, avec un rayon convenablement choisi), et son rayon de courbure est constant. De là, en revenant à la surface primitive, on conclut qu'il existe sur cette surface une trajectoire dont le rayon de courbure géodésique $\frac{R_1}{\cos a}$ est constant; et comme il est déjà établi que a et $\frac{R_1}{R_2}$ sont constants pour une trajectoire quelconque, R_1 et R_2 sont l'un et l'autre constants pour la trajectoire considérée qui est, par conséquent, une hélice tracée sur un cylindre de révolution.

Enfin si, revenant au cas général, *on suppose l'angle* i *égal à* $\frac{\pi}{2}$, les arcs ga, g_1a_1 sont des quadrants, les rayons de la sphère aboutissant aux points a, a_1 sont parallèles aux tangentes en g, g_1 du petit cercle gg_1, et la ligne aa_1 est un grand cercle de la sphère. Donc *les lignes de courbure de l'héliçoïde développable sont des courbes planes, et le plan de chacune d'elles coupe la surface sous un angle constant.* Réciproquement, *une ligne de courbure d'une surface développable étant plane, cette surface est un héliçoïde.* Les tan-

gentes en g, g_1 de l'indicatrice de l'arête de rebroussement, étant en effet parallèles aux rayons de la sphère qui aboutissent aux points a, a_1 du grand cercle servant d'indicatrice à la ligne de courbure que l'on suppose plane, sont parallèles à un plan fixe. La ligne gg_1 est donc plane et circulaire; l'arête de rebroussement est une hélice, et le plan de la ligne de courbure considérée coupe la surface sous un angle constant : ce qui renferme le théorème de M. Joachimstal.

Les résultats précédents ont été obtenus analytiquement par M. Molins, dans le cas particulier de l'hélice tracée sur un cylindre de révolution. (*Journal de Mathématiques*, tome VIII, page 141.)

101. Les mêmes considérations conduisent, très-simplement encore, à la solution de cet autre problème, également résolu par M. Molins : *Faire passer par une courbe donnée une surface développable telle que, par le développement de cette surface sur un plan, la courbe se transforme en un cercle de rayon donné* $R_{1,g}$. (*Journal de Mathématiques*, 1856, page 270.)

On voit d'abord que le problème est susceptible de deux solutions. Car si l'on mène par les tangentes successives de la ligne donnée une double série de plans formant avec les plans osculateurs correspondants de cette ligne, d'un côté et de l'autre de ces plans, des angles a dont les cosinus soient définis en chaque point par la relation

$$\frac{R_1}{\cos a} = R_{1,g} \quad \text{ou} \quad \cos a = \frac{R_1}{R_{1,g}},$$

les deux surfaces développables, enveloppes des plans de chaque série, répondront l'une et l'autre à la question.

Examinons, avec M. Molins, le cas où *la ligne donnée* est une *hélice tracée sur un cylindre de révolution*; et construisons les indicatrices sphériques gg_1 et aa_1 de l'arête de rebroussement de la surface cherchée et de l'hélice donnée : l'indicatrice de cette dernière est un petit cercle aa_1 de pôle p, et les

arcs ag, a_1g_1 ont pour enveloppe la ligne gg_1 (*voir* la figure de la page 140).

$R_{1,g}$ étant constant, ainsi que le rayon de première courbure R_1 de l'hélice donnée, l'angle a est constant; les arcs ag, a_1g_1 coupent le petit cercle aa_1 sous un angle constant; le point g, où chacun d'eux touche son enveloppe gg_1, s'obtient en abaissant l'arc pg perpendiculaire sur ag : et il résulte de cette construction que le triangle variable pga demeure toujours égal à lui-même et que les arcs pg et ga sont constants.

L'arc pg étant constant, la ligne gg_1 est un petit cercle de même pôle p que le cercle aa_1 : et l'arête de rebroussement de la surface cherchée est une *hélice* située sur un cylindre parallèle à celui qui contient l'hélice donnée.

L'arc ga étant constant, l'hélice donnée est une trajectoire des génératrices rectilignes de la surface, et se transforme, par le développement de cette dernière sur un plan, en un *cercle* coupant sous un angle constant les tangentes de l'arête de rebroussement développée. L'arête développée est donc l'enveloppe d'une série de cordes égales d'un cercle, ou un cercle concentrique au premier : et l'arête de rebroussement elle-même est une hélice dont la première courbure est constante, ou une hélice *tracée sur un cylindre de révolution*.

Les formules précédentes peuvent aussi conduire aux mêmes résultats.

CHAPITRE IX.

DES LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE GAUCHE.

---

102. *Observations préliminaires; notation et définitions.*

On appelle, comme on l'a déjà vu, *point central* de chaque génératrice $\overline{OA}$ d'une surface gauche la limite des positions occupées sur cette génératrice par le pied de la droite sur la-

quelle se mesure la plus courte distance $\overline{OO_1}$ entre cette génératrice et une génératrice infiniment voisine O′A′ : le système de tous les points analogues, relatifs aux diverses génératrices de la surface, formant une courbe continue OO′O″ que l'on appelle *ligne de striction* de la surface. Il résulte d'ailleurs de cette définition qu'*en chaque point de la ligne de striction le plan tangent à la surface est perpendiculaire au plan mené, par la génératrice qui passe en ce point, parallèlement à la génératrice infiniment voisine* : car il peut être considéré comme contenant la droite $\overline{OO_1}$, sur laquelle se mesure la plus courte distance entre ces deux génératrices.

Les droites indéfinies OO_1, $O'O'_1$, $O''O''_1$, . . ., sur lesquelles se mesurent ainsi les plus courtes distances entre les génératrices successives de la surface primitive S, sont à leur tour les génératrices d'une seconde surface gauche S′, que l'on appelle la *surface conjuguée :* et il est évident que les génératrices de la première surface reçoivent les plus courtes distances entre les génératrices consécutives de la surface conjuguée ; les deux surfaces étant circonscrites l'une à l'autre tout le long de leur commune intersection OO′O″, qui est, en outre, la ligne de striction de l'une et de l'autre.

Dans tout ce qui suit, nous désignerons l'angle de deux génératrices infiniment voisines de la première surface, leur plus courte distance, le coefficient de distribution des plans tangents (*voir* page 10) ; et les éléments analogues et correspondants de la surface conjuguée, par

$$\omega, \quad \varpi, \quad k = \frac{\omega}{\varpi}; \quad \text{et} \quad \omega', \varpi', \quad k' = \frac{\omega'}{\varpi'}.$$

Quand nous aurons à considérer une ligne AA′ tracée sur la surface, nous rapporterons ses points successifs A, A′, . . ., aux points correspondants O, O′ de la ligne de striction par les *coordonnées* spéciales

$$AO = R, \quad A'O' = R + dR;$$

l'arc élémentaire dS et l'inclinaison i de cette ligne sur la gé-

nératrice étant définis par les équations

(2) $$dS = \frac{dR \pm \varpi'}{\cos i} = \frac{\varpi}{\sin i . \cos\varphi},$$

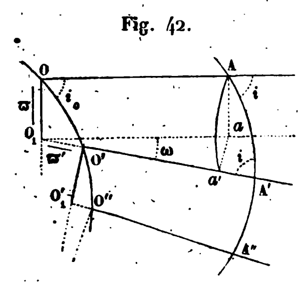
(3) $$\cot i = \frac{(dR \pm \varpi')\cos\varphi}{\varpi},$$

dont la seconde devient, quand il s'agit de la ligne de striction, pour laquelle $o = R = \varphi$,

(4) $$\cot i_0 = \frac{\varpi'}{\varpi}.$$

Pour démontrer ces formules, soient, comme précédemment, $OO_1 = \varpi$ la plus courte distance entre les génératrices infiniment voisines OA, O'A', et $O_1O' = \varpi'$ le segment déterminé sur O'A' par cette plus courte distance $\overline{OO_1}$ et la ligne de striction $\widehat{OQ'}$; menons les droites $O_1 a$ parallèle à OA, Aa parallèle et égale à OO_1, aa' perpendiculaire sur O'A'; et Aa', qui peut être considérée comme l'élément de la trajectoire orthogonale des génératrices issue du point A, et qui forme avec $\overline{Aa}$ l'angle φ mesurant l'inclinaison du plan tangent en A sur le plan tangent en O : inclinaison définie par l'équation fondamentale [*voir* p. 11, formule (IV)] :

Fig. 42.



(1) $$\operatorname{tang}\varphi = k.R.$$

On a dans le triangle $Aa'A'$, rectangle en a', les relations :

$$dS = AA' = \frac{a'A'}{\cos i} = \frac{Aa'}{\sin i} = \frac{\varpi}{\sin i . \cos\varphi};$$

$$\cot i = \frac{a'A'}{Aa'} = \frac{a'A'}{Aa : \cos\varphi} = \frac{a'A'.\cos\varphi}{\varpi}.$$

D'ailleurs, la trajectoire orthogonale Aa' et la plus courte distance $\overline{OO_1}$ interceptant sur les génératrices infiniment voi-

sines O A, O′ A′ des segments égaux, on a l'égalité

$$\overline{O_1 a'} = \overline{OA} :$$

ou

$$O_1 O' + O'A' - a'A' = OA,$$

ou

$$\varpi' + R + dR - a'A' = R;$$

ou enfin

$$\overline{a'A'} = dR \pm \varpi';$$

et la substitution de cette valeur dans les relations précédentes fournit les formules (2) et (3).

103. *Représentation sphérique d'une surface gauche et des lignes les plus remarquables, ligne de striction, lignes de courbure, lignes géodésiques, lignes asymptotiques et lignes d'ombre d'une telle surface.* (*Voyez fig.* 43, p. 148.)

Si l'on mène par le centre d'une sphère, de rayon 1, les rayons $\overline{cg}$, $\overline{cg'}$, ..., parallèles aux génératrices rectilignes d'une surface gauche quelconque S, leurs extrémités formeront une courbe sphérique gg', dont l'arc élémentaire ds mesure l'angle ω de deux génératrices consécutives de la surface primitive S, et dont l'angle de contingence géodésique e_g est égal à l'angle ω' des deux génératrices consécutives, *correspondantes,* de la surface conjuguée S′ : le rayon de courbure géodésique de cette ligne gg' étant défini dès lors par la formule

$$\text{tang}.g\gamma = \frac{\omega}{\omega'}. \tag{5}$$

En outre, si l'on construit l'indicatrice sphérique oo' de la ligne de striction OO′, *les points* o, o′,..., *de cette indicatrice seront respectivement situés sur les arcs de grand cercle* $\overset{\frown}{g\gamma}$, $\overset{\frown}{g'\gamma'}$,..., *normaux en* g, g′,..., *à la ligne* gg′. L'arc $\overset{\frown}{go}$, et le grand cercle tangent en g à la ligne gg', représentent, en effet, le premier, le plan tangent au point O de la ligne de striction; le second, le plan mené par la génératrice du même point parallèlement à la génératrice infiniment voisine; et

doivent être, comme ces deux plans, perpendiculaires entre eux.

Si l'on construit de même l'indicatrice aa' d'une ligne quelconque AA', tracée sur la surface : les plans des arcs de grand cercle $\widehat{ag}\ \widehat{a'g'}$,..., joignant les points correspondants des deux lignes aa', gg', sont parallèles aux plans tangents de la surface aux points A, A',...; et l'inclinaison de l'arc $\widehat{ag}$ sur l'arc normal $\widehat{go}$ ou $\widehat{g\gamma}$, ou *le complément de l'inclinaison de l'arc* $\widehat{ag}$ *sur la ligne* gg', *mesure l'angle* φ *des plans tangents au point* A *de la ligne considérée, et au point correspondant* O *de la ligne de striction.*

Enfin, la ligne pp' formée par les intersections successives des arcs $\widehat{ga}, \widehat{g'a'}$,..., sert d'indicatrice à l'arête de rebroussement de la surface développable circonscrite à la proposée suivant la ligne AA' : et si dans la formule (14) de la page 49,

$$\tang ai = \frac{ds . \sin a}{e_g + da},$$

on remplace l'arc ai, l'angle a, ds, e_g par leurs valeurs actuelles, arc gp, $\frac{\pi}{2} - \varphi, \omega, \omega'$, relatives à la ligne gg' et à l'inclinaison de l'arc gp sur cette ligne, on obtient cette nouvelle formule :

(6) $$\tang gp = \frac{\omega . \cos \varphi}{\omega' \pm d\varphi},$$

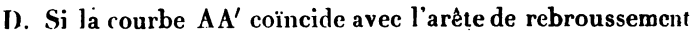
dont nous ferons un continuel usage dans ce chapitre, ainsi que des principes suivants, par lesquels nous terminerons ces préliminaires.

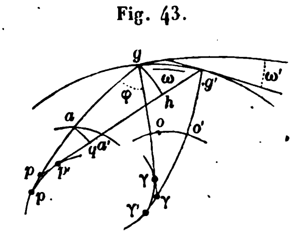
A. *Si la courbe* AA' *est la ligne de striction de la surface, les arcs* ga, g'a' *sont normaux à la ligne* gg'.

B. *Si la courbe* AA' *est une ligne géodésique, les arcs* ga, g'a' *sont normaux à l'indicatrice* aa'.

C. *Si cette courbe est une ligne de courbure de la surface, les arcs* ap, a'p' *sont des quadrants, et les arcs* gp, ga *sont*

complémentaires. Car les rayons ca et cp de la sphère sont parallèles à la tangente de la ligne de courbure AA′ et à sa tangente conjuguée, et ces tangentes sont rectangulaires.


D. Si la courbe AA′ coïncide avec l'arête de rebroussement de la surface développable circonscrite à la proposée suivant cette courbe, ou *si la courbe* AA′ *est une ligne asymptotique de la surface, la ligne* pp′ *coïncide avec la ligne* aa′, *et les arcs* ga, g′a′ *sont tangents à la ligne* aa′.


Fig. 43.

E. Enfin, *si la courbe* AA′ *est une ligne d'ombre relative à des rayons incidents parallèles* (ou la courbe de contact d'un cylindre circonscrit à la surface), *la ligne* pp′ *se réduit à un point, et les arcs* ga, g′a′ *concourent en ce point*, qui est l'extrémité du rayon de la sphère parallèle aux rayons incidents.

104. *Rayon de courbure géodésique d'une trajectoire* AA′, *sous l'angle constant* i, *des génératrices rectilignes* (*voir* la figure précédente). Décrivant du pôle commun p, les arcs gh, aq interceptés entre les arcs pag, $pa'g'$, on a l'égalité $ga = hq$, dont la comparaison avec l'égalité *donnée*, $ga = g'a' = i$, conduit à la relation

$$qa' = hg',$$

ou, à cause des triangles rectangles aqa', ghg',

$$(40) \qquad E_g = E\cos a = \omega \sin\varphi.$$

On a d'ailleurs, par la formule (2) (*voir* page 145),

$$dS = \frac{\varpi}{\sin i \,.\, \cos\varphi},$$

et, par suite,

$$(40') \qquad R_{1,g} = \frac{dS}{E_g} = \frac{1}{\sin i \,.\, k\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{1+k^2R^2}{k^2R}\cdot\frac{1}{\sin i}.$$

Il résulte de cette formule qu'*en un même point d'une surface*

gauche, la somme des carrés des premières courbures géodésiques de deux trajectoires, perpendiculaires entre elles, est constante.

105. *Propriétés de la ligne de striction; cas particuliers dans lesquels la ligne de striction est une trajectoire des génératrices rectilignes; une ligne géodésique; ou une ligne asymptotique de la surface.*

Théorème. *Une ligne, tracée dans de certaines conditions sur une surface gauche, peut être,* soit *une ligne géodésique,* soit *une trajectoire des génératrices rectilignes,* soit *la ligne de striction même de la surface : et si deux de ces trois propriétés se trouvent réunies dans une même ligne de la surface, elle possède aussi la troisième.* (O. Bonnet, *Journal de l'École Polytechnique*, t. XIX, p. 71.)

Démonstration. Que la ligne de striction OO′ soit d'abord une ligne géodésique, *ou* une trajectoire des génératrices rectilignes : dans le premier cas (*voir* la figure précédente), les arcs go, $g'o'$, déjà normaux à la ligne gg', puisque OO′ est la ligne de striction, sont aussi normaux à la ligne oo', puisque OO′ est une ligne géodésique. Les deux lignes gg', oo', ont donc même développée sphérique, et les arcs go, $g'o'$, normaux à l'une et à l'autre, conservent une valeur constante qui mesure l'inclinaison, également constante, de la ligne OO′ sur les génératrices de la surface. Dans le second cas, les arcs go ont une longueur constante; ils sont encore normaux à la ligne décrite par leur origine g; ils sont donc pareillement normaux à la ligne oo' décrite par leur extrémité o; et la ligne OO′ est une ligne géodésique.

Enfin, si AA′ est à la fois une trajectoire des génératrices et une ligne géodésique de la surface, les arcs ga ont une longueur constante et sont normaux à la ligne aa' décrite par leur extrémité a; ils sont donc pareillement normaux à la ligne gg' décrite par leur origine g. Les arcs ga, $g'a'$ coïncident en direction avec les arcs go, $g'o'$; les plans tangents à la surface, menés par les points correspondants de la ligne considérée AA

et de la ligne de striction OO', sont parallèles; et ces lignes elles-mêmes coïncident.

Toutes les surfaces gauches dans lesquelles la ligne de striction présente ces particularités peuvent donc être engendrées *en menant, par chacun des points d'une ligne à double courbure quelconque, prise pour ligne de striction, et dans le plan rectifiant correspondant, une droite faisant avec la ligne considérée un angle constant :* cet énoncé contenant, en particulier, la génération de la surface gauche de révolution.

Supposons, en dernier lieu, que *la ligne de striction* OO' *soit une ligne asymptotique de la surface :* les arcs go, $g'o'$ étant alors tangents à la ligne oo', celle-ci coïncide avec la développée $\gamma\gamma'$ de la ligne gg'. On a donc constamment

$$go = g\gamma, \quad \operatorname{tang} go = \operatorname{tang} i_0 = \operatorname{tang} g\gamma,$$

ou, d'après les formules (4) et (5) (*voir* pages 145, 146),

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\varpi}{\varpi'} \quad \text{ou} \quad k = k'.$$

En outre, l'arc élémentaire de la développée oo', ou l'angle de contingence E de la ligne de striction, est égal à la différentielle di_0 de l'inclinaison, go ou $g\gamma$, de la génératrice de la surface sur la ligne de striction; et comme d'ailleurs les génératrices de la surface sont, dans le cas actuel, situées dans les plans osculateurs de la ligne de striction, on a ce théorème:

Si par les divers points, et dans les plans osculateurs correspondants d'une ligne à double courbure quelconque, considérée comme directrice, on mène des droites coupant cette ligne sous une inclinaison variable dont la différentielle soit précisément égale à l'angle de contingence de la directrice : ces droites seront les génératrices d'une surface gauche S *ayant cette directrice pour ligne de striction, et les coefficients de distribution des plans tangents de la surface* S *et de sa conjuguée* S' *seront constamment égaux.*

En particulier, *si par les divers points d'une droite on mène de nouvelles droites, non situées deux à deux dans le même*

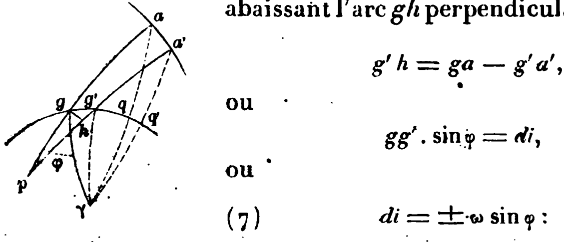
plan, et coupant la première sous un angle constant : ces droites formeront une surface gauche ayant la droite donnée pour ligne de striction. On a un exemple de cette génération dans la surface gauche formée par les normales principales d'une ligne géodésique d'un cône de révolution.

Remarque. La plupart de ces propositions ont été énoncées déjà par M. Catalan. (*Bulletin de la Société Philomathique*, 1848, page 68.)

106. *Équation générale des lignes géodésiques, sur une classe particulière de surfaces gauches. Théorèmes sur le triangle géodésique.* (*Voir* page 147, remarque B.)

Les arcs ga, $g'a'$ étant normaux à l'indicatrice aa' de la ligne géodésique considérée AA', on a, en abaissant l'arc gh perpendiculaire sur $g'a'$,

Fig. 44.



$$g'h = ga - g'a',$$

ou

$$gg'.\sin\varphi = di,$$

ou

$$(7) \qquad di = \pm\omega \sin\varphi :$$

ce qui montre, en passant, que *la variation de l'inclinaison d'une ligne géodésique sur la génératrice rectiligne de la surface a la même valeur, pour toutes les lignes géodésiques issues d'un même point de la surface et terminées à la génératrice infiniment voisine.*

Quelle que soit d'ailleurs la ligne considérée AA', on a, par la formule (3) (*voir* page 145) :

$$\cot i = \frac{d\mathrm{R} \pm \varpi'}{\varpi} \cos\varphi,$$

et l'on déduit, de la multiplication membre à membre des deux dernières équations,

$$\cot i.di = \frac{d.\sin i}{\sin i} = \pm k\,(d\mathrm{R} \pm \varpi')\sin\varphi.\cos\varphi,$$

ou enfin, en employant la formule (1) $\tang\varphi = k.R$,

$$(8) \qquad \frac{d.\sin i}{\sin i} = \pm \frac{k^2 R (dR \pm \varpi')}{1 + k^2 R^2},$$

équation générale des lignes géodésiques d'une surface gauche quelconque.

Si l'on pose

$$(A) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varpi' = 0, \\ k = \text{constante}, \end{array} \right.$$

le second membre devient une différentielle exacte; l'équation (8) est susceptible d'une première intégration, et on trouve en l'effectuant,

$$L.\sin i = \pm \frac{1}{2} L(1 + k^2 R^2) + L.C,$$

ou

$$(A') \qquad \sin i = C(1 + k^2 R^2)^{\pm\frac{1}{2}} = C(\cos\varphi)^{\mp 1}.$$

Quant à l'ambiguïté que présente cette formule, et qui provient du double signe + et — que nous avons dû conserver dans l'équation (8), il suffira de la faire disparaître pour l'une quelconque des surfaces représentées par les équations

$$(A) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varpi' = 0, \\ k = \text{constante}. \end{array} \right.$$

Nous choisirons, à cet effet, l'héliçoïde gauche à plan directeur; les autres surfaces, *qui sont engendrées,* comme on le voit aisément, *par les bi-normales d'une ligne gauche dont la seconde courbure est constante,* se prêtant moins bien à la discussion.

Supposons donc que la surface soit un héliçoïde gauche, et soit (*voir* la figure précédente) γ le pôle du grand cercle gg', lieu des extrémités des rayons de la sphère parallèles aux génératrices de la surface. Menons l'arc de grand cercle γa coupant gg' en q. On a, dans le triangle sphérique rectangle aqg,

$$\sin aq = \sin ag . \sin \widehat{agq}, \quad \text{ou} \quad \sin aq = \sin i . \cos\varphi.$$

Si donc on prenait le signe supérieur dans la formule (A′), on aurait

$$\sin aq = \mathrm{C}, \qquad aq = \text{constante}:$$

L'arc γa serait lui-même constant ; les arcs $a\gamma$, $a'\gamma$ seraient normaux à la ligne aa', comme les arcs ag, $a'g'$, et coïncideraient avec ces arcs ; les plans tangents aux différents points de la ligne AA′ seraient parallèles à l'axe de l'héliçoïde ; et la ligne AA′ ne serait pas une ligne géodésique quelconque de la surface, mais l'axe même de l'héliçoïde.

On doit donc rejeter les signes supérieurs et écrire, définitivement,

$$(9) \qquad \frac{\sin i}{\cos\varphi} = \mathrm{C} \quad \text{ou} \quad \sin i . \sqrt{1 + k^2 \mathrm{R}^2} = \mathrm{C}.$$

Observation. L'équation des lignes géodésiques de l'héliçoïde à plan directeur, déjà obtenue par M. Catalan (*Mémoire sur les surfaces gauches*, *Journal de l'École Polytechnique*, 29ᵉ cahier, 1843, page 142),

$$\frac{\cot^2\theta - u^2}{1 + u^2} = c,$$

ou, en rentrant dans notre notation,

$$\frac{\cot^2 i - \mathrm{R}^2}{1 + \mathrm{R}^2} = c,$$

peut servir de vérification à notre méthode. Elle revient identiquement, en effet, à l'équation (9),

$$\sin i . \sqrt{1 + k^2 \mathrm{R}^2} = \mathrm{C},$$

pourvu qu'on fasse dans celle-ci

$$k = 1;$$

et cette particularisation du coefficient k résulte implicitement, dans la notation de M. Catalan, de la forme même de l'équation

$$z = \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x},$$

qu'il emploie pour représenter l'héliçoïde.

Applications. La formule (9)

$$\frac{\sin i}{\cos \varphi} = C$$

conduit à quelques conséquences curieuses, relatives aux *triangles géodésiques* tracés sur l'une quelconque des surfaces gauches définies précédemment.

1). *Dans tout triangle géodésique* isocèle *ayant pour base la ligne de striction, la génératrice rectiligne issue du sommet est perpendiculaire à la base, et divise l'angle au sommet en deux parties égales :* en appelant *isocèle* un triangle dont les angles à la base sont égaux; et en remarquant que la ligne de striction est ici une trajectoire orthogonale des génératrices et une ligne géodésique de la surface.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de remarquer que la constante C, entrant dans l'équation d'une ligne géodésique, représente le *cosinus* de l'inclinaison de cette ligne sur la ligne de striction, au point où elle coupe cette dernière ; les constantes, entrant dans les équations des deux côtés du triangle isocèle considéré, sont donc égales; et ces équations étant

$$\sin i = C.\cos \varphi, \quad \sin i' = C.\cos \varphi';$$

si l'on y fait $\varphi = \varphi'$, pour avoir les angles i et i' qui se rapportent au sommet du triangle, on trouve

$$\sin i = \sin i' \quad \text{ou} \quad i = i'.$$

2). *Les côtés d'un triangle géodésique* ABC *formant avec les génératrices rectilignes de la surface, issues des sommets de ce triangle, six angles distincts; le produit des sinus de trois de ces angles, non adjacents, est égal au produit des sinus des trois autres :* propriété analogue à celle du triangle rectiligne, pouvant être étendue, comme celle-là, à un polygone géodésique quelconque; et dans laquelle les génératrices aboutissant aux sommets remplacent les droites issues d'un même point dans le triangle rectiligne.

Pour la démontrer, nous désignerons par φ_A, φ_B, φ_C les an-

gles formés par les plans tangents en A, B, C respectivement avec les plans tangents aux points correspondants de la ligne de striction ; par $i_{c,A}$ et $i_{c,B}$ les angles formés en A et B, avec les génératrices de ces points, par le côté AB ou c; et ainsi des deux autres côtés. Nous aurons donc, d'après ces notations, et en appliquant successivement la formule $\frac{\sin i}{\cos \varphi} =$ constante aux côtés AB, BC, CA, les relations suivantes :

$$\frac{\sin i_{c,A}}{\cos \varphi_A} = \frac{\sin i_{c,B}}{\cos \varphi_B},$$

$$\frac{\sin i_{a,B}}{\cos \varphi_B} = \frac{\sin i_{a,C}}{\cos \varphi_C},$$

$$\frac{\sin i_{b,C}}{\cos \varphi_C} = \frac{\sin i_{b,A}}{\cos \varphi_A};$$

dont la multiplication membre à membre fournit la relation énoncée.

107. *Équation générale des lignes de courbure. Applications.*

L'indicatrice d'une ligne de courbure de la surface étant aa', et p étant le point d'intersection des arcs infiniment voisins ga, $g'a'$ (*voir* la *figure* de la page 148), l'arc ap est égal à un quadrant, d'après la remarque C (*voir* page 147); les arcs gp et $ga = i$ sont complémentaires, et la tangente trigonométrique de l'un est égale à la cotangente de l'autre. Or, d'après les formules (3) et (6) des pages 145 et 147,

$$\cot i = \frac{d\text{R} \pm \varpi'}{\varpi} \cdot \cos \varphi, \qquad \text{tang}\, gp = \frac{\omega}{\omega' \pm d\varphi} \cdot \cos \varphi;$$

on a donc

$$\text{(A)} \qquad \frac{d\text{R} \pm \varpi'}{\varpi} = \frac{\omega}{\omega' \pm d\varphi},$$

ou, en remplaçant $d\varphi$ par sa valeur

$$d\varphi = (k \,.\, d\text{R} + \text{R} \,.\, dk) \cos^2 \varphi,$$

tirée de l'équation (1), $\tang\varphi = k.R$,

$$(10) \qquad (dR \pm \varpi')\left[\omega' \pm (k.dR + R.dk)\cos^2\varphi\right] = \varpi\omega.$$

Cette équation, quoique assez compliquée, donne lieu cependant à quelques applications intéressantes.

1). Posons

$$o = \omega' = \varpi' = dk,$$

la surface devient un *héliçoïde à plan directeur*, et l'équation se réduit à

$$k.\overline{dR}^2.\cos^2\varphi = \varpi.\omega,$$

ou, en remplaçant ϖ par $\frac{\omega}{k}$ et $\cos^2\varphi$ par $\frac{1}{1+k^2R^2}$, à celle-ci :

$$\frac{k.dR}{\sqrt{1+k^2R^2}} = \pm\omega = \pm d\Omega;$$

d'où

$$(10)_1 \qquad R = \frac{1}{2k}\left(e^{\pm(\Omega-\alpha)} - e^{\mp(\Omega-\alpha)}\right):$$

équation générale, suivant les coordonnées polaires R et Ω, des projections des lignes de courbure de l'héliçoïde sur le plan directeur (Catalan, Mémoire cité, page 143). On peut d'ailleurs parvenir directement à cette équation, par le seul emploi de la formule (3)

$$\cot i = \frac{dR \pm \varpi'}{\varpi}\cdot\cos\varphi,$$

et en remarquant que, dans le cas actuel, les lignes de courbure ne sont autres que les trajectoires, sous l'angle de 45 degrés, des génératrices rectilignes de la surface.

2). *Définition analytique de la surface gauche dont toutes les lignes de première courbure sont équidistantes de la ligne de striction,* de telle manière que la ligne de striction et l'une quelconque des lignes de première courbure interceptent des segments égaux sur toutes les génératrices.

Si l'on suppose cette condition remplie par toutes les lignes de première courbure, l'équation générale de ces lignes, (10),

devra être satisfaite par la substitution

$$dR = o \quad \text{ou} \quad R = \text{constante} = C:$$

quelle que soit d'ailleurs, pour chaque point de la ligne de striction, la valeur attribuée à cette constante. Or, si l'on introduit l'hypothèse $dR = o$ dans l'équation (10), et si, après avoir multiplié tous ses termes par $\frac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + k^2R^2$, on l'ordonne par rapport à R, elle devient

$$(\varpi\omega \mp \varpi'\omega')\, k^2.R^2 \pm \varpi'.dk.R + (\varpi\omega \mp \varpi'\omega') = o;$$

et cette équation devant être satisfaite par une valeur quelconque attribuée à R, doit se réduire à une identité, ce qui donne les deux équations de condition

$$\varpi'.dk = o, \quad \varpi\omega \mp \varpi'\omega' = o,$$

ou les deux systèmes d'équations

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} \varpi' = o, \\ \varpi.\omega = o; \end{cases}$$

$$\text{(C')} \qquad \begin{cases} dk = o \quad \text{ou} \quad k = \text{constante}, \\ \varpi\omega = \varpi'\omega' \quad \text{ou} \quad k' = k.\text{tang}^2 i_0. \end{cases}$$

Le système (C) se décompose lui-même en deux :

$$o = \varpi = \varpi' \quad \text{ou} \quad o = \varpi' = \omega.$$

Les équations $o = \varpi = \varpi'$, ou $o = \sqrt{\varpi^2 + \varpi'^2}$, représentent une surface gauche dont la ligne de striction se réduit à un point, c'est-à-dire un *cône quelconque;* et les dernières $o = \varpi' = \omega$ représentent un *cylindre.*

Il résulte de là que les surfaces gauches *proprement dites,* possédant la propriété énoncée, sont définies analytiquement par les équations (C') :

$$(10)_2 \qquad \begin{cases} k = \text{constante}, \\ k' = k\, \text{tang}^2 i_0. \end{cases}$$

On reconnaît aisément d'ailleurs que la dernière équation exprime seulement que la ligne de striction est une ligne de

courbure; et l'on a par conséquent ce théorème : *Toute surface gauche dont une des lignes de première courbure coïncide avec la ligne de striction, et dans laquelle le coefficient de distribution des plans tangents est constant, a toutes ses lignes de première courbure équidistantes de la ligne de striction* (*).

3). Cherchons en particulier à définir *celle des surfaces gauches jouissant de la propriété précédente, dont la ligne de striction coupe les génératrices sous un angle constant:* ce qui nous fournira en même temps une vérification.

La ligne de striction de la surface cherchée étant une trajectoire des génératrices rectilignes, est aussi une ligne géodésique suivant le théorème du n° 105. Étant à la fois ligne géodésique et ligne de courbure, la ligne de striction est *plane*; les génératrices de la surface étant dès lors situées dans les plans menés par les tangentes de la ligne de striction perpendiculairement au plan de cette ligne, et faisant avec ces tangentes l'angle constant i_0. Or, ce premier résultat, joint à la relation $k=$ constante, conduit aisément à cette conclusion : que la ligne de striction est un cercle, *la surface cherchée étant dès lors l'hyperboloïde de révolution, à une nappe.*

Soient, en effet, γ le pôle commun du petit cercle gg' et du grand cercle oo' qui sert d'indicatrice à la ligne de striction; E, dS et R_1 l'angle de contingence, l'arc élémentaire et le rayon de courbure de la ligne de striction. On a

Fig. 45.

$$\omega = gg' = \hat{\gamma} . \sin g\gamma = oo' . \cos go = \text{E} \cos i_0,$$

d'où

$$\text{E} = \frac{\omega}{\cos i_0}; \quad \text{et} \quad \varpi = d\text{S} . \sin i_0,$$

d'où

$$d\text{S} = \frac{\varpi}{\sin i_0};$$

(*) On peut ajouter que *les lignes de seconde courbure déterminent, sur les génératrices rectilignes, des divisions homographiques.*

et l'on en déduit

$$R_1 = \frac{dS}{E} = \frac{1}{k \tang i_0} = \text{constante},$$

puisque k et i_0 sont l'un et l'autre constants. C. Q. F. D.

On aurait d'ailleurs, pour la surface conjuguée S',

$$R_1 = \frac{1}{k' \cot i_0}:$$

et il résulte, de cette double expression de R_1, la relation

$$k' = k \cdot \tang^2 i_0.$$

4). *Définir la surface gauche dont les lignes de courbure sont des trajectoires des génératrices rectilignes de la surface.*

Une ligne de première courbure de la surface cherchée devant couper sous un angle constant toutes les génératrices de la surface, et étant elle-même coupée à angles droits par toutes les lignes de seconde courbure, il en résulte que ces dernières sont inclinées d'un même angle sur les génératrices; et il en est de même pour les lignes de première courbure.

Soit donc i l'inclinaison constante des lignes de l'une des courbures sur les génératrices : posons

$$\cot i = C,$$

et introduisons cette constante C dans l'équation (3) de la page 145; il viendra

$$C = \frac{dR \pm \varpi'}{\varpi} \cdot \cos\varphi,$$

d'où

$$dR \cdot \cos\varphi = C\varpi \mp \varpi' \cos\varphi, \quad \text{et} \quad dR \pm \varpi' = \frac{C\varpi}{\cos\varphi}.$$

Si l'on porte ces dernières valeurs dans l'équation générale (10) des lignes de courbure (page 156), on trouve, successivement,

$$\frac{C\varpi}{\cos\varphi}\left\{\omega' \pm R\cos^2\varphi \cdot dk \pm k\cos\varphi \cdot C \cdot \varpi \mp k\varpi'\cos^2\varphi\right\} = \varpi\omega,$$

$$\pm k\varpi \cdot C\cos\varphi + \omega' \pm (R \cdot dk \mp k\varpi')\cos^2\varphi = \frac{\omega \cdot \cos\varphi}{C},$$

ou, à cause de $k.\varpi = \omega$,

$$\omega' \pm (\mathrm{R}.dk \mp k.\varpi')\cos^2\varphi = \omega\left(\frac{1}{\mathrm{C}} \mp \mathrm{C}\right)\cos\varphi;$$

d'où, en remplaçant $\cos\varphi$ par $\frac{1}{\sqrt{1+k^2\mathrm{R}^2}}$, et élevant au carré,

$$(10)_3 \quad \left\{\omega'(1+k^2\mathrm{R}^2) \pm (\mathrm{R}dk \mp k\varpi')\right\}^2 = \omega^2\left(\frac{1}{\mathrm{C}} \mp \mathrm{C}\right)^2(1+k^2\mathrm{R}^2).$$

Cette équation, du quatrième degré en R, montre qu'il existe, en général, sur chaque génératrice d'une surface gauche *quelconque*, quatre points tels, que l'une des lignes de courbure passant en ces points coupe la génératrice sous l'angle i défini par la formule $\cot i = \mathrm{C}$; mais, dans la surface cherchée, cette circonstance doit se reproduire en tous les points de chaque génératrice : l'équation précédente doit donc être une identité, et les coefficients des diverses puissances de R, R^4, R^3..R^0, doivent être identiquement nuls. Or, le coefficient de R^4 étant $\omega'^2.k^4$, on doit avoir d'abord

$$(m) \qquad \omega' = 0,$$

et l'équation de condition $(10)_3$ se réduit alors à celle-ci

$$\left\{k^2\omega^2\left(\frac{1}{\mathrm{C}} \mp \mathrm{C}\right)^2 - \overline{dk}^2\right\}\mathrm{R}^2 \pm 2k\varpi'.dk.\mathrm{R} + \left\{\omega^2\left(\frac{1}{\mathrm{C}} \mp \mathrm{C}\right)^2 - k^2\varpi'^2\right\} = 0$$

qui doit se réduire elle-même à une identité. La surface cherchée sera donc définie par l'équation (m) jointe aux trois suivantes :

$$(a) \qquad k^2\omega^2\left(\frac{1}{\mathrm{C}} \mp \mathrm{C}\right)^2 - \overline{dk}^2 = 0,$$

$$(b) \qquad \varpi'.dk = 0,$$

$$(c) \qquad \omega^2\left(\frac{1}{\mathrm{C}} \mp \mathrm{C}\right)^2 - k^2\varpi'^2 = 0.$$

On satisfait à la seconde, *soit* en posant

$$(n) \qquad \varpi' = 0,$$

et la troisième et la première donnent alors, successivement,

$$(p)\qquad \frac{1}{C} \mp C = 0,$$

et $dk = 0$, ou

$$(q)\qquad k = \text{constante};$$

soit en posant

$$dk = 0, \quad \text{ou} \quad k = \text{constante};$$

et, dans ce cas, la première et la troisième donnent, successivement,

$$\frac{1}{C} \mp C = 0, \quad \text{et} \quad \varpi' = 0.$$

Ces deux solutions rentrent l'une dans l'autre; la surface cherchée est définie par les équations

$$(\text{I})\qquad \begin{cases} \omega' = 0, \\ \varpi' = 0, \\ k = \text{constante}, \end{cases}$$

et l'inclinaison constante des lignes de courbure sur les génératrices est définie par l'équation (p) :

$$\frac{1}{C} \mp C = 0, \quad \text{ou} \quad C^2 \mp 1 = 0, \quad \text{ou} \quad \cot^2 i - 1 = 0;$$

d'où

$$(\text{II})\qquad i = 45^\circ.$$

On a donc ce théorème : *L'héliçoïde à plan directeur est la seule surface gauche dont les lignes de courbure coupent les génératrices rectilignes sous un angle constant.*

Remarque. La génératrice rectiligne représentant, en chaque point d'une surface gauche, l'une des asymptotes de l'indicatrice de la surface en ce point, la tangente trigonométrique de son inclinaison sur une des lignes de courbure est égale, comme on sait, à la racine carrée du rapport des deux rayons de courbure principaux de la surface en ce point. Le théorème précédent est donc susceptible de ce nouvel énoncé :

Toute surface gauche dans laquelle le rapport des rayons de courbure principaux a la même valeur en tous les points de la surface, est un héliçoïde à plan directeur; et le rapport en question est égal à l'unité : ce qui constitue une généralisation du théorème de Meunier.

5). *Lignes de courbure des surfaces gauches du second degré.*

La représentation sphérique d'une surface gauche, appliquée aux surfaces réglées du second degré (hyperboloïde à une nappe, ou paraboloïde hyperbolique), conduit d'une manière très-simple et sans aucun calcul, si l'on veut, aux équations *des lignes de courbure* de ces surfaces.

Soient, en effet, $\gamma\gamma' gg'$ l'*ellipse sphérique*, formée par les extrémités des rayons de la sphère parallèles aux génératrices rectilignes de l'hyperboloïde, et que nous nommerons *ellipse directrice; aa'* l'indicatrice sphérique d'une ligne de courbure AA' de la surface; $ag\gamma$, $a'g'\gamma'$,..., les grands cercles parallèles aux plans tangents de la surface en A, A',..., et contenant les pôles g et γ, g' et γ', des quatre génératrices des deux systèmes situées dans ces plans; mm' la courbe enveloppe des grands cercles ag, $a'g'$; et nn' enfin la *supplémentaire* de la courbe mm'.

D'après des propositions bien connues, dues à M. Ch. Dupin,

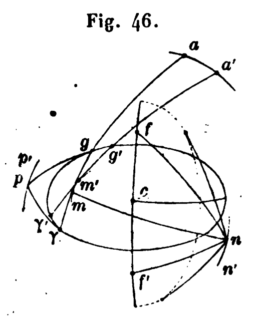


Fig. 46.

l'arc $\widehat{am}$, qui mesure l'angle de deux *tangentes conjuguées rectangulaires,* est égal à un quadrant; et le point m est le milieu de l'arc $g\gamma$, parce que les tangentes aux deux lignes de courbure qui passent par le point A de l'hyperboloïde, sont les bissectrices des angles formés par les deux génératrices rectilignes qui se croisent au même point.

Il résulte de là un premier moyen de trouver par le calcul les équations générales des lignes aa', mm' et nn'. Car le point $a(x, y)$ étant donné, le point $m(X, Y)$ est aussi donné, par

l'intersection de la *polaire absolue* du point a, $xX+yY=-1$, et de sa *polaire* $a^2yY+b^2xX=a^2b^2$ *relative* à l'ellipse directrice; ceci résultant de ce que les quatre points a et m, g et γ, forment une *division harmonique*. D'ailleurs, l'arc ma étant tangent à la courbe mm', on a l'égalité

$$\frac{dY}{dX}=\frac{Y-y}{X-x};$$

et de là, en remplaçant X, Y et leurs différentielles par leurs valeurs en fonction de x, y, dx, dy, on déduira l'équation différentielle de la ligne aa'. Cette équation, où les variables sont séparées, s'intègre aisément : et l'on trouve que la courbe aa' est du *quatrième degré*, les courbes mm', nn' étant seulement du *second*.

Mais on peut aussi trouver les courbes mm' et nn' sans calcul. Imaginons, en effet, que l'on ait construit les arcs de grand cercle ayant pour pôles les points m, g et γ; ces trois arcs, qui se croisent au point n, seront : l'arc tangent à la courbe nn' en n, et les deux arcs menés par le même point tangentiellement à l'*ellipse sphérique* E', *supplémentaire de l'ellipse directrice* E. Mais ces deux derniers arcs sont également inclinés sur l'arc tangent à la courbe nn' en n, puisque les arcs mg et $m\gamma$ sont égaux; il font aussi des angles égaux avec les deux arcs de grand cercle qui réunissent leur point de concours n aux deux foyers f et f' de l'ellipse E', par une propriété des coniques sphériques analogue à une propriété bien connue des coniques planes; par suite, l'arc tangent en n à la courbe cherchée nn' fait des angles égaux avec les *rayons vecteurs* qui réunissent le point n à deux points fixes f et f' de la sphère : et la courbe nn' est une ellipse, ou une hyperbole sphérique, ayant ces points fixes pour foyers.

Or, la ligne nn' est formée par les extrémités des rayons de la sphère parallèles aux normales menées à l'hyperboloïde par les différents points d'une même ligne de courbure; nous avons donc ce résultat : *Si l'on mène par le centre d'une sphère des rayons parallèles aux normales menées à l'hyper-*

boloïde par les points successifs des lignes de première et de seconde courbure, les extrémités de ces rayons déterminent sur la sphère deux séries d'ellipses et d'hyperboles homofocales; et les foyers communs de ces courbes coïncident avec les foyers de l'ellipse supplémentaire de l'ellipse directrice.

S'il s'agit du *paraboloïde hyperbolique*, l'ellipse $\gamma\gamma' gg'$ est remplacée par le système de deux grands cercles gg', $\gamma\gamma'$ parallèles aux *plans directeurs* de la surface; la courbe mm' est telle, que le segment de l'arc tangent à cette courbe compris entre les deux cercles fixes gg' et $\gamma\gamma'$, est divisé par le point de contact en deux parties égales; la courbe supplémentaire nn' est, par conséquent, une conique sphérique ayant pour foyers les pôles des cercles gg', $\gamma\gamma'$; et la conclusion est la même que pour l'hyperboloïde.

Enfin, on déduit immédiatement du théorème précédent une équation générale des lignes de courbure, contenant une constante arbitraire, et qui, combinée avec l'équation de la surface, détermine entièrement ces lignes. Tous ces résultats, d'ailleurs, peuvent être transportés ensuite aux autres surfaces du second degré. Il suffit, pour cela, d'employer la méthode analytique ordinaire, par laquelle on passe d'un calcul relatif à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, par exemple, au calcul analogue relatif à l'hyperboloïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, par le simple changement de c^2 en $-c^2$.

Remarque I. De la définition générale des lignes nn' que nous venons de donner, on peut déduire, successivement, les équations générales des lignes nn', des lignes supplémentaires mm' (dont les projections centrales sur un plan convenablement choisi sont des cercles); et enfin des polaires réciproques pp' de ces dernières, par rapport à l'ellipse directrice : les lignes pp' étant encore des courbes du second degré dont les axes coïncident, en direction, avec ceux de l'ellipse directrice. Or, le rayon de la sphère aboutissant au point p est parallèle au diamètre conjugué du plan tangent en A, ou au diamètre

de l'hyperboloïde qui aboutit au point A de la ligne de courbure AA'. Nous aurons donc, par l'équation des coniques sphériques pp', l'équation générale des *cônes du second degré, concentriques à l'hyperboloïde, et contenant les lignes de courbure de la surface.*

Remarque II. La figure sphérique déjà employée peut fournir, pour chaque ligne de courbure de la surface, la tangente trigonométrique de l'inclinaison du plan osculateur sur le plan tangent.

6). *Toute surface gauche dont les lignes de première courbure sont situées dans des plans parallèles, est un hyperboloïde de révolution.*

En effet, l'on démontre aisément, à l'aide de quelques considérations de géométrie, et par l'emploi de l'équation générale (A) de la page 155, que les lignes de première courbure d'une pareille surface sont *équidistantes* de la ligne de striction, et que celle-ci est une *trajectoire* des génératrices rectilignes. On rentre donc dans le problème 3) de la page 158, et la surface est un hyperboloïde de révolution.

108. *Des lignes asymptotiques d'une surface gauche quelconque.* (*Voir* p. 148, remarque D.)

Dans toute surface gauche du second degré, les lignes asymptotiques, qui correspondent aux génératrices rectilignes de chaque système, sont les génératrices de l'autre système. Nous allons voir que les lignes asymptotiques d'une surface gauche quelconque présentent, par rapport aux génératrices rectilignes de cette surface, des propriétés métriques identiques à celles qui ont lieu entre les deux systèmes de génératrices rectilignes d'une surface du second degré. (*Voir* la fig. 43, p. 148.)

Soient, comme à l'ordinaire, aa' l'indicatrice sphérique d'une ligne asymptotique, et gg' la ligne formée par les extrémités des rayons de la sphère parallèles aux génératrices rectilignes de la surface : aa' sera l'enveloppe des arcs de grand cercle $\widehat{ga}$, $\widehat{g'a'}$, et l'on aura, par la formule (6), page 147,

$$\tang i = \tang \widehat{ga} = \tang \widehat{gp} = \frac{\omega \cos \varphi}{\omega' \pm d\varphi},$$

i désignant l'inclinaison de la ligne asymptotique sur la génératrice correspondante. On a trouvé d'ailleurs (formule 3, page 145),

$$\cot i = \frac{d\text{R} \pm \varpi'}{\varpi}\cos\varphi\,;$$

et la multiplication membre à membre de ces relations donne

$$k(d\text{R} \pm \varpi')\cos^2\varphi = \omega' \pm d\varphi = \omega' \pm (k.d\text{R} + \text{R}dk)\cos^2\varphi.$$

Or, on voit aisément que le signe supérieur du second membre doit être rejeté, sans quoi dR disparaîtrait de la relation précédente, qui se réduirait dès lors à une équation *finie* en R, sans constante arbitraire, et fournissant pour chaque génératrice un nombre déterminé de valeurs de R, ce qui serait absurde. On trouve donc, en prenant le signe inférieur,

(11) $$(2k.d\text{R} + \text{R}.dk \pm k.\varpi')\cos^2\varphi = \omega',$$

pour équation générale des lignes asymptotiques.

1). *Supposons la surface à plan directeur*, ou posons $\omega' = 0$; il viendra, en considérant simultanément *deux* lignes asymptotiques, et en désignant par R, R′ les distances (de même signe ou de signes contraires) des points correspondants de ces lignes à la ligne de striction,

$$2k.d\text{R} + \text{R}.dk \pm k.\varpi' = 0,$$
$$2k.d\text{R}' + \text{R}'.dk \pm k.\varpi' = 0;$$

d'où, par soustraction,

$$2k.d(\text{R}' - \text{R}) + (\text{R}' - \text{R})dk = 0,$$

ou encore

$$2.\frac{d(\text{R}' - \text{R})}{\text{R}' - \text{R}} + \frac{dk}{k} = 0;$$

d'où, enfin,

(a) $$k(\text{R}' - \text{R})^2 = \text{constante} = \text{C}'.$$

Si l'on applique, en outre, cette formule au système formé de la première des lignes asymptotiques précédentes, et d'une troisième, caractérisées respectivement par les distances R et R″;

on aura, de même,

$$(b)\qquad k(R''-R)^2 = \text{constante} = C'',$$

et l'on déduit, de la comparaison des formules (a) et (b), la relation

$$(11)\qquad \frac{R'-R}{R''-R} = \text{constante}.$$

Donc, *dans toute surface gauche à plan directeur, les lignes asymptotiques divisent deux génératrices quelconques de la surface en segments proportionnels*; ce qui renferme la propriété bien connue du paraboloïde hyperbolique dont les lignes asymptotiques sont précisément les génératrices rectilignes du second système.

Il résulte encore de là, que *les* n *droites joignant les traces, sur deux génératrices déterminées, de* n *lignes asymptotiques de la surface, sont* n *génératrices d'un même paraboloïde.*

1'). Si, indépendamment de la condition $\omega'=0$, on pose encore $k=$ constante, la formule (a) se réduit à

$$(a')\qquad R'-R = \text{constante},$$

et *deux lignes asymptotiques déterminées interceptent des segments égaux sur toutes les génératrices.*

1''). Si l'on pose simultanément $\omega'=0$ et $\varpi'=0$, auquel cas *la surface est engendrée par des perpendiculaires à une droite fixe, menées par les différents points de cette droite*; l'équation générale (11) se réduira à

$$2k\,.\,dR + R\,.\,dk = 0,$$

d'où

$$(a'')\qquad k\,.\,R^2 = \text{constante},$$

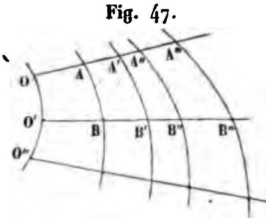
qui se réduit elle-même à

$$(a''')\qquad R = \text{constante};$$

quand on ajoute aux précédentes la condition $k=$ constante : la surface est alors un *héliçoïde*, et *ses lignes asymptotiques sont les trajectoires orthogonales des génératrices.*

2). Revenant au cas général d'une surface gauche quelconque, nous aurons, en appliquant simultanément à deux lignes asymptotiques AB, A'B', l'équation (11) préalablement divisée par $\omega'.\cos^2\varphi = \frac{\omega'}{1+k^2R^2}$,

Fig. 47.



$$(a) \qquad 2k.\frac{dR}{\omega'} + R.\frac{dk}{\omega'} \pm \frac{k\varpi'}{\omega'} = 1 + k^2R^2,$$

$$(a') \qquad 2k.\frac{dR'}{\omega'} + R'.\frac{dk}{\omega'} \pm \frac{k\varpi'}{\omega'} = 1 + k^2R'^2;$$

d'où, en retranchant membre à membre, et posant $R' - R = AA' = r'$,

$$(b) \qquad 2k.\frac{dr'}{\omega'} + r'.\frac{dk}{\omega'} = k^2r'(R'+R) = k^2r'(r'+2R).$$

Appliquant ensuite, simultanément, cette dernière équation aux deux systèmes formés par les lignes asymptotiques AB et A'B', AB et A"B"; nous aurons, en posant encore $R'' - R = AA'' = r''$,

$$(b) \qquad 2k.\frac{dr'}{\omega'} + r'.\frac{dk}{\omega'} = k^2r'^2 + 2kR.r',$$

$$(b') \qquad 2k.\frac{dr''}{\omega'} + r''.\frac{dk}{\omega'} = k^2r''^2 + 2kR.r''.$$

De là, en multipliant la première par $-r''$, la seconde par $+r'$, ajoutant ensuite, et remarquant que R disparaît, ainsi que le rapport différentiel $\frac{dk}{\omega'}$, il vient

$$2\frac{r'.dr'' - r''.dr'}{\omega'} = kr'r''(r''-r'),$$

ou

$$(c) \qquad \frac{d\frac{r''}{r'}}{\frac{r''}{r'}\left(\frac{r''}{r'}-1\right)} = \frac{k.\omega'}{2r'}:$$

équation qui représente le système des trois lignes asymptotiques AB, A′B′ et A″B″.

Appliquant enfin cette dernière équation (c) aux deux systèmes de trois lignes asymptotiques AB, A′B′, A″B″, et AB, A′B′, A‴B‴; et éliminant l'élément différentiel $\frac{k\omega'}{2}$ entre les équations résultantes, nous aurons cette équation différentielle du système de quatre lignes asymptotiques quelconques :

$$(d) \qquad \frac{d.\frac{r'''}{r'}}{\frac{r'''}{r'}\left(\frac{r'''}{r'}-1\right)}=\frac{d.\frac{r''}{r'}}{\frac{r''}{r'}\left(\frac{r''}{r'}-1\right)}.$$

Cette équation prend, successivement, les formes suivantes :

$$\frac{dy}{y(y-1)}=\frac{dx}{x(x-1)},\quad \frac{dy}{y-1}-\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x-1}-\frac{dx}{x};$$

d'où, en intégrant et désignant par C la constante introduite,

$$\frac{y-1}{y}=\mathrm{C}.\frac{x-1}{x}:$$

de là enfin, en remplaçant y et x par leurs valeurs $\frac{r'''}{r'}$ et $\frac{r''}{r'}$,

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{r'''-r'}{r'''}=\mathrm{C}.\frac{r''-r'}{r''}, \\ \text{ou} \\ \frac{\mathrm{A'A'''}}{\mathrm{AA'''}}:\frac{\mathrm{A'A''}}{\mathrm{AA''}}=\mathrm{C}; \end{array}\right.$$

et cette relation exprime que *le rapport anharmonique des quatre points* A, A′, A″, A‴, *demeure constant.* On a donc les théorèmes suivants : *Dans toute surface gauche, quatre lignes asymptotiques quelconques déterminent sur les génératrices rectilignes de la surface une infinité de systèmes de quatre points, dont le rapport anharmonique est constant;* — n *lignes asymptotiques de la surface déterminent sur deux génératrices quelconques deux divisions homographiques; et*

les droites qui réunissent les traces de chacune de ces lignes sur les deux génératrices sont n *génératrices d'un même hyperboloïde.* On voit que ce théorème comprend la propriété, bien connue, des génératrices de l'hyperboloïde.

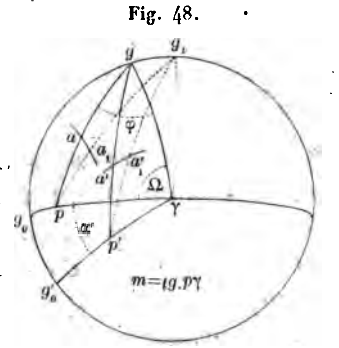
Remarque I. L'équation (c) exprime que le rapport $\frac{r''}{r'} = \frac{AA''}{AA'}$ demeure constant, quand $\omega' = 0$, ou *lorsque la surface admet un plan directeur.*

C'est le résultat que nous avons obtenu, par un calcul spécial, dans le n° 1) de la page 166.

Remarque II. Le théorème précédent pourra être utilisé dans diverses applications et, en particulier, dans l'étude des surfaces gauches formées par les normales principales des lignes à double courbure. Ainsi, par exemple, on en déduit immédiatement que : *si les génératrices d'une surface gauche sont les normales principales de trois courbes distinctes*, auquel cas ces courbes sont trois lignes asymptotiques *équidistantes* de la surface, *elles seront les normales principales d'une infinité d'autres lignes*, à savoir de toutes les lignes asymptotiques de la surface : propriété qui caractérise l'héliçoïde gauche, à plan directeur.

109. *Équation générale des lignes d'ombre, relatives à des rayons incidents parallèles, dans les surfaces à plan directeur : théorèmes de collinéation sur les triangles et polygones formés par ces lignes.*

Fig. 48.



Soient γ le pôle du grand cercle gg_1 de la sphère, parallèle au plan directeur; aa_1 l'indicatrice d'une ligne d'ombre AA_1, et p l'extrémité du rayon de la sphère parallèle aux rayons incidents. Menons les arcs de grand cercle γp, γg

et *pag*, qui est parallèle au plan tangent à la surface en A, et dont l'inclinaison *pgγ* sur l'arc *gγ* est égale à l'angle déjà désigné par φ.

Posant

$$m = \operatorname{tang} \widehat{p\gamma}, \quad \Omega = \widehat{p\gamma g},$$

on trouve, entre les quatre éléments consécutifs $p\gamma$, Ω, γg et φ du triangle $p\gamma g$, la relation

$$\cot \widehat{p\gamma} . \sin \widehat{\gamma g} = \cos \widehat{\gamma g} . \cos \Omega + \sin \Omega . \cot \varphi$$

ou, à cause de $\widehat{\gamma g} = \frac{\pi}{2}$ et de la relation $\operatorname{tang} \varphi = k.\mathrm{R}$,

$$\frac{1}{m} \sin \widehat{g\gamma} = \frac{\sin \Omega}{k.\mathrm{R}};$$

ou

(12) $$k.\mathrm{R} = m.\sin \Omega :$$

telle est l'équation générale des lignes d'ombre. La constante m qui y entre ne dépend que de l'inclinaison des rayons incidents sur l'axe de la surface, et les coordonnées courantes sont R et Ω : cette dernière désignant l'angle que la génératrice rectiligne qui passe par un point quelconque de la ligne d'ombre considérée fait avec la génératrice fixe, issue du point où cette ligne rencontre la ligne de striction.

Applications. 1). THÉORÈME I. *Les lignes d'ombre, issues d'un même point de la surface, divisent les génératrices rectilignes en segments proportionnels.*

Démonstration. Soient

$$k.\mathrm{R} = m \sin \Omega, \quad k.\mathrm{R}' = m' \sin(\Omega + \alpha'), \quad k.\mathrm{R}'' = m'' \sin(\Omega + \alpha''),$$

les équations de trois lignes d'ombre IAA_1, $\mathrm{IA'A'}_1$, $\mathrm{IA''A''}_1$, issues d'un même point I de la surface, et rencontrant une génératrice rectiligne quelconque suivant les points A, A', A'' dont les distances à la ligne de striction sont R, R', R'', : α' et α'' désignant d'ailleurs, dans ces équations, les angles que forment avec la génératrice du point où la première des trois lignes

précédentes rencontre la ligne de striction, les génératrices des points analogues relatifs aux deux dernières.

On peut mettre ces équations sous la forme

$$\sin \Omega = \frac{k \cdot R}{m},$$

$$\sin \Omega \cos \alpha' + \cos \Omega . \sin \alpha' = \frac{k \cdot R'}{m'},$$

$$\sin \Omega . \cos \alpha'' + \cos \Omega . \sin \alpha'' = \frac{k \cdot R''}{m''};$$

et si, après avoir éliminé cos Ω entre les deux dernières, on remplace, dans l'équation résultante

$$\sin \Omega . \sin (\alpha'' - \alpha') = k \left(\frac{R'}{m'} \sin \alpha'' - \frac{R''}{m''} \cdot \sin \alpha' \right),$$

sin Ω par sa valeur tirée de la première, il vient, en divisant par k,

$$\text{(A)} \qquad \frac{R}{m} \cdot \sin (\alpha'' - \alpha') = \frac{R'}{m'} \cdot \sin \alpha'' - \frac{R''}{m''} \cdot \sin \alpha' :$$

et de là, en posant

$$R' = R + r', \quad R'' = R + r''; \quad \text{ou} \quad \overline{AA'} = r', \quad \overline{AA''} = r'',$$

$$\text{(A}'\text{)} \quad R \left[\frac{\sin(\alpha'' - \alpha')}{m} - \frac{\sin \alpha''}{m'} + \frac{\sin \alpha'}{m''} \right] = \frac{r'}{m'} \sin \alpha'' - \frac{r''}{m''} \sin \alpha'.$$

Or, les trois lignes considérées concourant en un même point I, l'équation (A) du système de ces lignes doit être satisfaite par la substitution $R = R' = R''$; ou l'équation (A′), par l'hypothèse $r' = r'' = 0$. Le terme en R disparaît donc de l'équation (A′) qui se réduit à

$$(12), \qquad \frac{r'}{r''} = \frac{AA'}{AA''} = \text{constante};$$

et la proposition est démontrée.

2). Théorème II. *Les trois sommets d'un triangle variable* abc, *dont les côtés sont formés par des lignes d'ombre, glissant respectivement sur trois génératrices déterminées* A, B, C

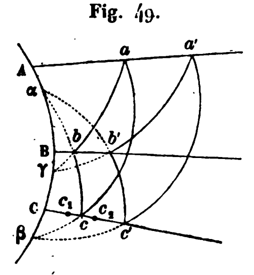
de la surface, et les deux premiers côtés ab et bc *de ce triangle tournant constamment autour de deux points donnés* γ *et* α *: le côté libre* ac *de ce triangle passera constamment par un troisième point fixe* β ; *et les trois pôles* α, β, γ *appartiendront à une même ligne d'ombre.*

Démonstration. Considérant le triangle variable dans deux quelconques de ses positions abc, $a'b'c'$, réunissons les deux pôles donnés γ, α par une ligne d'ombre qui aille rencontrer aux points A, B, C les génératrices données, de mêmes noms ; et qui soit rencontrée elle-même, au point β, par le troisième côté ac du premier triangle. Pour établir que le côté homologue $a'c'$ du second triangle passe aussi par le point β, il suffira, en vertu du théorème précédent, d'établir l'égalité

$$(x) \qquad \frac{Aa}{Aa'} = \frac{Cc}{Cc'}.$$

Or, en vertu du même théorème, les trois lignes d'ombre issues du point γ, divisent les génératrices A et B en segments proportionnels ; il en est de même des lignes d'ombre issues du point α, relativement aux génératrices B et C. On a donc les deux égalités :

Fig. 49.



$$\frac{Aa}{Aa'} = \frac{Bb}{Bb'}, \quad \frac{Bb}{Bb'} = \frac{Cc}{Cc'},$$

qui entraînent l'égalité (x) et le théorème énoncé.

3). Théorème III. *Réciproquement, les trois côtés d'un triangle variable* abc *formé par des lignes d'ombre, tournant respectivement autour de trois points fixes* α, β, γ situés sur une même ligne d'ombre, *et les deux premiers sommets* a *et* b *du triangle décrivant deux génératrices données* A *et* B : *le sommet libre* c *décrira pareillement une troisième génératrice.*

Démonstration. Prenant le triangle variable dans deux de

ses positions abc, $a'b'c'$, menons la génératrice qui passe par le sommet c' du second; et, pour démontrer qu'elle passe aussi par le sommet c du premier, supposons qu'elle coupe en deux points distincts, c_1 et c_2, les deux côtés bc et ac de ce triangle. Si l'on appelle C le point de rencontre de cette génératrice et de la ligne d'ombre $\alpha\gamma\beta$, on trouvera, par l'application du théorème I à chacune des séries de lignes d'ombre, issues des points α, β, γ; et par la définition des points c_1, c_2 :

$$\frac{Cc_1}{Cc'} = \frac{Bb}{Bb'}, \quad \frac{Cc_2}{Cc'} = \frac{Aa}{Aa'}, \quad \frac{Aa}{Aa'} = \frac{Bb}{Bb'}:$$

d'où, par comparaison,

$$\frac{Cc_1}{Cc'} = \frac{Cc_2}{Cc'}, \quad \text{ou} \quad Cc_1 = Cc_2.$$

Les points c_1, c_2 sont donc confondus en un même point, qui est le point c; et le théorème est démontré.

Observation. Les deux théorèmes précédents peuvent s'appliquer à un polygone curviligne d'un nombre quelconque de sommets, pourvu que l'on suppose que les *pôles* des différents côtés du polygone appartiennent à une même ligne d'ombre.

4). Si *la ligne de striction de la surface considérée est une ligne droite,* l'équation (12) de la page 171,

$$k \cdot R = m \cdot \sin \Omega,$$

représentera la projection sur le plan directeur d'une ligne d'ombre quelconque, rapportée aux coordonnées polaires R et Ω. Si l'on pose, en outre, $k =$ constante, *la surface devient un héliçoïde*, et l'équation précédente représente un cercle. On en conclut que, *dans l'héliçoïde gauche, les projections sur le plan directeur des lignes d'ombre relatives à des rayons incidents parallèles, sont des cercles, passant par le pied de l'axe sur ce plan.* (De la Gournerie, *Journal de l'École Polytechnique*, 1851.)

Remarque. Dans une surface gauche quelconque, *quatre*

lignes d'ombre, issues d'un même point de la surface et relatives à des rayons incidents parallèles, coupent une génératrice rectiligne quelconque en quatre points dont le rapport anharmonique est constant ?

Nous pourrions démontrer cette proposition dans le cas particulier où le cône directeur de la surface est de révolution, et lorsque le point de concours des lignes d'ombre appartient à la ligne de striction. La démonstration est d'ailleurs toute semblable à la précédente, et n'exige que des calculs plus longs.

La proposition énoncée sous forme interrogative est donc probablement vraie. Elle est d'ailleurs d'une vérité évidente pour les surfaces du second degré ; et ce dernier cas contient peut-être le cas général : De la même manière que la propriété bien connue des deux systèmes de génératrices rectilignes de l'hyperboloïde peut conduire, par une méthode que nous a indiquée M. O. Bonnet, à notre théorème sur les lignes asymptotiques d'une surface gauche quelconque.

110. *Scolie.* Le rôle de l'indicatrice sphérique, dont nous avons cherché à établir l'importance dans l'étude des courbes tracées sur certaines surfaces spéciales, s'amoindrit singulièrement, ou disparaît même d'une manière totale, quand il s'agit d'une surface quelconque. On a vu déjà, en effet, combien est imparfait notre procédé pour la représentation sphérique d'une surface de révolution ; et en exceptant les surfaces réglées, qui se prêtent le mieux à notre méthode, il paraît difficile de représenter *sphériquement*, d'une manière utile, les diverses courbes tracées sur une surface quelconque.

Toutefois, quand on a seulement à considérer certaines courbes spéciales tracées sur une surface, l'emploi de lignes sphériques auxiliaires, liées à ces courbes suivant de nouvelles lois, peut encore offrir de grands avantages, alors même que la surface demeure absolument indéterminée.

Ainsi, considérant une surface quelconque S et ses deux

systèmes de lignes de courbure, supposons menés par le centre d'une sphère des rayons parallèles aux normales de la surface suivant les divers points de chacune de ces lignes. A chaque ligne de courbure de la surface correspondra une ligne sphérique particulière, et les tangentes en des points *correspondants* de ces deux lignes seront parallèles. Il résulte, en premier lieu, de ce parallélisme, que les deux séries de lignes sphériques, ainsi conjuguées aux lignes de première et de seconde courbure de la surface, formeront, comme ces dernières, un double système orthogonal. En second lieu, si la surface considérée admet une ligne de courbure plane, la ligne sphérique conjuguée ayant ses tangentes parallèles à un même plan, sera plane et se réduira à un petit cercle de la sphère, dont le plan sera parallèle à celui de la ligne de courbure. D'ailleurs, et cette conséquence très-simple paraît ne pas avoir été remarquée, le théorème de M. Joachimstal est rendu évident par l'emploi de ces considérations : puisque les rayons de la sphère ont une inclinaison constante sur le plan du petit cercle, et que ces rayons sont parallèles aux normales de la surface primitive, menées par les différents points de la ligne de courbure plane considérée.

Tels sont les principes de l'élégante méthode employée par M. O. Bonnet dans l'étude des surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes, et dont le problème suivant offre une application. (*Journal de l'École Polytechnique*, 1853.)

PROBLÈME. *Toutes les lignes de courbure d'une surface étant planes, trouver les relations de position qui peuvent exister entre les plans de toutes ces lignes.*

Solution. Les deux séries de lignes de courbure de la surface étant composées de lignes planes, le système des lignes sphériques conjuguées se composera de deux séries de cercles formant un double système orthogonal ; et les plans de ces cercles étant parallèles aux plans de ces lignes, il suffira, pour répondre à la question, de résoudre le problème suivant :

Trouver sur la sphère les deux séries les plus générales de

cercles formant un double système orthogonal, et définir les relations de position que présentent les plans de tous ces cercles.

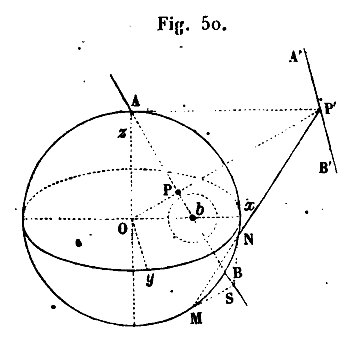
1. Admettons, ce que nous démontrerons à la fin, que *si les cercles du second système ne se coupent pas, les cercles du premier se coupent nécessairement deux à deux;* et soient A et B les points d'intersection de *deux cercles déterminés* du premier système, lesquels sont coupés à angle droit par tous les cercles du second. Formons la projection stéréographique des deux séries de cercles, en prenant le point A pour centre de projection, ou point de vue.

Les deux cercles de la première série qui passent par A et B, se transforment en deux *droites* distinctes, passant par la projection *b* du point B, et devant être coupées à angle droit par les projections des cercles de la seconde série. Ces projections sont donc tous les cercles ayant pour centre commun le point *b*.

D'ailleurs, les projections des autres cercles de la première série devant couper à angle droit les cercles concentriques en *b*, ces projections doivent se réduire à des droites passant par le point *b*. Donc, *les cercles de la première série passent par les deux mêmes points* A *et* B *de la sphère.*

2. Pour trouver, en second lieu, la définition des cercles de la seconde série, il suffit de remarquer que l'un quelconque de ces cercles se projetant suivant une circonférence ayant pour centre le point *b*, le sommet S du cône circonscrit à la sphère suivant ce cercle est situé, d'après un théorème dû à M. Chasles, sur la droite A*b*, ou AB. Si donc on construit, par rapport au grand cercle AB, la polaire MN d'un point quelconque S pris sur le prolongement

Fig. 50.



de AB, MN sera le diamètre d'un cercle de la seconde série, situé dans un plan perpendiculaire à celui du grand cercle AB. Or la polaire MN du point S passe par le point fixe P', pôle de la corde AB par rapport au grand cercle $\widehat{AB}$. Donc *les plans des cercles de la seconde série passent par une droite fixe* A'B' *qui est perpendiculaire au plan* AOB, *ainsi qu'à la droite* AB, *et qui passe en outre par le pôle* P' *de cette dernière :* et le problème auxiliaire se trouve résolu.

3. Si l'on revient maintenant à la surface primitive, on retrouve ce théorème, dû à M. Bonnet : *Si toutes les lignes de courbure d'une surface sont planes, les plans des lignes de chaque courbure sont parallèles à une même droite* D_1, *ou* D_2; *et les droites* D_1, D_2 *sont perpendiculaires entre elles.*

4. Il nous reste à démontrer ce que nous avons admis dans le n° 1, à savoir que les cercles de l'une ou de l'autre série se coupent deux à deux. Examinant la question sur le plan, par une substitution permise, supposons que *les cercles de la première série ne se coupent pas.* Il est évident d'abord que ces cercles, qui doivent se succéder d'une manière continue, ne sauraient être *extérieurs* deux à deux. Considérons donc, en particulier, la figure formée de deux de ces cercles, *intérieurs* l'un à l'autre, et de tous les cercles de la seconde série; et construisons la figure réciproque de celle-là par rapport à un point *o* pris dans le même plan. Si le point *o* est convenablement choisi, la figure réciproque se composera, d'après un théorème dû à M. Liouville, de *deux cercles concentriques* et des lignes, droites ou circulaires, qui les coupent orthogonalement. Mais on voit immédiatement que ces dernières lignes sont *droites*, et qu'elles passent par le centre commun des deux cercles. De là, en revenant à la figure primitive, on voit que les *cercles de la seconde série se coupent suivant les deux mêmes points.*

Remarque. Le problème auxiliaire précédent a été traité d'abord par Lagrange, pour le cas du plan (Académie de Berlin,

Nouveaux Mémoires, 1779, page 161); et, récemment, par MM. Bonnet et Catalan, pour le cas de la sphère (Mémoire cité, et *Journal de Mathématiques*, tome XIX, page 132). La solution précédente qui repose, comme celle de M. Catalan, sur les propriétés de la projection stéréographique, s'en sépare cependant, d'une manière très-nette, en ce qu'elle n'exige aucune considération d'analyse.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

SECONDE PARTIE.

THÉORIE MÉCANIQUE DES LIGNES A DOUBLE COURBURE.

CHAPITRE X.

DES LIGNES A DOUBLE COURBURE CONSIDÉRÉES COMME TRAJECTOIRES D'UN POINT MATÉRIEL EN MOUVEMENT SUR UNE SURFACE.

---

111. Newton, dans le livre des *Principes*, a considéré le premier quelques cas, très-particuliers, il est vrai, du mouvement d'un point sur une surface. La 10e section du Ier livre, ayant pour titre : *Du mouvement des corps dans des superficies données, et des oscillations des corps suspendus par des fils,* contient en effet, — indépendamment de cette observation générale que tout ce que l'on sait, relativement au mouvement d'un point sur une courbe plane, peut être transporté au mouvement sur une surface de révolution dont la courbe considérée serait une section méridienne, — deux propositions relatives au mouvement, sur une surface de révolution quelconque, d'un point soumis à une force passant constamment par l'axe de la surface. Newton remarque, dans ce cas, que les aires décrites par la projection du mobile sur un plan perpendiculaire à l'axe, sont proportionnelles aux temps : et cette observation renferme, comme nous l'avons montré dans la Ire Partie, la propriété bien connue des lignes géodésiques d'une surface de révolution.

Euler, traitant ce sujet avec plus d'étendue, résolut, dans le dernier chapitre de sa *Mécanique* (tome II, pages 457-500), divers problèmes dignes d'intérêt, relatifs au mouvement d'un point sur un cylindre quelconque, sur un cône ou sur

une surface de révolution. La solution qu'il y donna du problème du pendule sphérique a seule été reprise depuis, par divers analystes, et perfectionnée avec d'autant plus de soin, que l'on est plus généralement convenu de borner à ce seul cas particulier l'étude du mouvement sur une surface.

Il suffit d'ailleurs, pour expliquer l'inactivité de la science sur ce point, de remarquer que l'étude, directe et géométrique, du mouvement sur une surface exige, essentiellement, la notion préalable de la *courbure géodésique* et l'emploi de formules fournissant l'expression géométrique de cette courbure pour les diverses lignes tracées sur la surface que l'on considère : de la même manière que l'étude des diverses lignes planes que peut décrire un mobile soumis à l'action de certaines forces, a dû être précédée de l'étude géométrique de la courbure de ces lignes. Or, non-seulement la notion de la courbure géodésique est une des acquisitions les plus récentes de la théorie des lignes tracées sur une surface, mais encore les formules qui donnent l'expression de cette courbure, sur certaines surfaces particulières, sont peu nombreuses et peut-être même peu appropriées, dans leurs formes actuelles, à l'objet dont nous parlons. Il en résulte que l'étude du mouvement sur une surface ne pouvait guère être abordée, géométriquement au moins et avec quelques fruits, avant l'époque actuelle ; et que, même aujourd'hui, et jusqu'à de nouvelles recherches sur cette matière, elle devra se borner à quelques surfaces spéciales, telles que la sphère, les surfaces coniques ou cylindriques et les surfaces de révolution : les seules pour lesquelles on ait encore des expressions suffisamment géométriques de la courbure géodésique. Telles sont, du moins, les limites dans lesquelles nous nous sommes tenu, et que nous n'avons pas essayé de dépasser. On voit que ce sont à peu près les limites déjà atteintes par Euler. On trouvera néanmoins dans notre travail plusieurs résultats nouveaux, parmi lesquels nous citerons deux théorèmes généraux relatifs à la réduction du mouvement sur une surface conique ou cylindrique quelconque, au mouvement sur le plan ; des propriétés non encore

observées du mouvement du pendule sphérique; de nombreuses et intimes analogies entre le mouvement sur la sphère et le mouvement sur le plan; quelques recherches sur le mouvement d'un point sur une surface, gauche, ou de révolution; enfin un théorème, relatif à la représentation géométrique de la vitesse et du temps, dans une brachistochrone plane ou sphérique, et fournissant la division d'un arc quelconque de la courbe en arcs partiels *isochrones*.

Quant à la méthode que nous avons suivie, elle se traduit par des formules absolument nouvelles. L'une d'elles met en évidence les divers éléments géométriques dont dépend la pression exercée par le mobile sur la surface; éléments déjà contenus, il est vrai, mais non encore explicitement reconnus dans la formule ordinaire. Mais celle de nos formules qui nous paraît offrir le plus d'intérêt, est celle qui fournit l'expression générale de la vitesse du mobile. Quoique ayant la même origine, elle est absolument distincte de la formule ordinaire, déduite du principe des forces vives; car, tandis que celle-ci renferme la *grandeur* et la *direction relative* de la force extérieure, et paraît, dans certains cas au moins, indépendante de la forme de la trajectoire dans l'intervalle des points extrêmes; la *direction relative* de la force extérieure entre *seule* dans la première, qui contient une intégrale dont les éléments et la valeur dépendent essentiellement de la forme de la trajectoire. La comparaison des deux formules, quand elles sont l'une et l'autre intégrables, fournit d'ailleurs une première équation, en termes finis, de la trajectoire.

112. *Notation générale.* Un mobile se mouvant sur une surface quelconque, celle-ci divise l'espace en deux régions dont l'une quelconque peut être considérée comme *intérieure*. Nous supposerons toujours le mobile placé sur le bord *interne* de la surface, de telle sorte qu'il ne puisse se détacher de celle-ci qu'en entrant dans la région intérieure : la réaction exercée par la surface sur le mobile étant, dès lors, dirigée en chaque point suivant la *normale intérieure*.

Nous appellerons : N la valeur absolue de la réaction normale, et R le rayon de courbure de la ligne géodésique tangente à la trajectoire du mobile; G la valeur absolue de la force extérieure sollicitant le mobile; γ l'angle, aigu ou obtus, formé par la direction de cette force avec la normale intérieure, et V l'angle, aigu ou obtus, que fait la projection de cette force sur le plan tangent à la surface avec la tangente à la trajectoire, dirigée dans le sens du mouvement.

Enfin nous désignerons par v la vitesse du mobile, et par ds, e_g, r_g, r l'arc élémentaire, l'angle de contingence géodésique, le rayon de courbure géodésique et le rayon de courbure absolue de la trajectoire; le plan osculateur de cette dernière faisant avec le plan tangent à la surface un angle a, dont le complément $\frac{\pi}{2} - a$ mesure l'angle du rayon de courbure r de la trajectoire et de la normale intérieure à la surface. Nous supposerons toujours ce dernier angle aigu; et nous prendrons la masse du mobile pour unité.

§ I.

Du mouvement d'un point sur une surface quelconque.

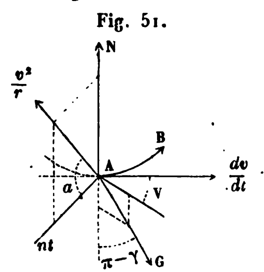
113. Théorème fondamental. *Un point matériel se mouvant sur une surface quelconque, sous l'influence d'une force extérieure* G *et de la réaction normale* N *de la surface : la composante de la force extérieure suivant celle des normales à la trajectoire qui est tangente à la surface a pour valeur, en chaque point,* $\frac{v^2}{r_g}$; *et la pression exercée par le mobile sur la surface est égale à* $\frac{v^2}{R} - G\cos\gamma$, $G\cos\gamma$ *désignant la composante, positive ou négative, de la force extérieure suivant la normale intérieure à la surface.*

Démonstration. Le mobile étant regardé comme se mouvant librement dans l'espace, on sait que le système formé de la force extérieure G et de la réaction normale N de la surface

est équivalent au système $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{v^2}{r}$ des composantes, tangentielle et normale, de l'accélération totale. Il en résulte que la somme des composantes des forces du premier système, suivant une direction quelconque, est pareillement équivalente à la somme des composantes des forces du second système, suivant la même direction. Or, pour la direction considérée, A*nt*, perpendiculaire à la fois à la force N du premier système et à la force $\frac{dv}{dt}$ du second, la première somme se réduit à la composante de la force extérieure G, et la seconde à la composante de la force $\frac{v^2}{r}$ dirigée suivant le rayon de courbure r de la trajectoire; et comme ce rayon fait, avec la direction de projection, un angle mesurant précisément l'inclinaison a du plan osculateur de la trajectoire sur le plan tangent à la surface, cette dernière composante est égale à $\frac{v^2}{r}\cos a$, ou à $\frac{v^2}{r:\cos a}$, ou à $\frac{v^2}{r_g}$ (*voir* page 8, n°.8).

Quant à la pression (égale et contraire à la réaction N) exercée par le mobile sur la surface, il est évident qu'elle se compose de la pression $\frac{v^2}{R}$ (dirigée suivant la normale extérieure) qu'il exercerait s'il continuait à se mouvoir librement, avec sa vitesse actuelle, sur la ligne géodésique tangente à la trajectoire; et de la composante normale $-G\cos\gamma$ de la force extérieure : de sorte que l'on a pour la valeur de la pression rapportée, quant au sens, à la normale extérieure, $\frac{v^2}{R} - G\cos\gamma$.

Fig. 51.



Que si cette composition de la pression ne paraît pas suffisamment évidente, on pourra l'établir rigoureusement, par les considérations ordinaires, en remarquant que la somme des composantes des forces N et G suivant la normale intérieure

AN à la surface est égale à $N + G\cos\gamma$; tandis que la somme analogue pour les forces équivalentes $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{v^2}{r}$ se réduit à $\frac{v^2}{r}\sin a$, ou, d'après le théorème de Meunier, à $\frac{v^2}{R}$; et la comparaison de ces valeurs conduit bien à la formule

$$N = \frac{v^2}{R} - G\cos\gamma. \; (*)$$

114. Corollaire. On déduit immédiatement de ce théorème ces trois formules générales :

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d \,.\, v^2}{v^2} = 2 \frac{\cos V}{\sin V} \cdot \frac{ds}{r_g} = 2 \,.\, \frac{e_g}{\tan g V}, \\ v = C \,.\, e^{\int \frac{e_g}{\tan g V}}; \end{array} \right.$$

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{v^2}{r_g} = G \sin\gamma \,.\, \sin V, \\ r_g = \frac{v^2}{G \sin\gamma \,.\, \sin V}; \end{array} \right.$$

$$\text{(III)} \quad N = \frac{v^2}{R} - G\cos\gamma.$$

Les deux dernières ne sont que la traduction analytique du théorème précédent; et la première formule résulte de la combinaison de la seconde avec l'équation, déduite du principe des forces-vives,

$$d \,.\, v^2 = 2\,(G\sin\gamma) \,.\, \cos V \,.\, ds.$$

Enfin, la combinaison des formules (II) et (III) donne

(*) Cette seule partie de la démonstration suppose une restriction dans le choix, que nous avons dit déjà être arbitraire, de celle de deux régions de l'espace que l'on dit *intérieure* par rapport à la surface : et pour que la valeur de la pression, ou de la réaction normale, subsiste telle qu'elle résulte de la formule (III), il convient d'appeler *normale intérieure* de la surface celle des deux directions de la normale qui coïncide avec la direction du rayon de courbure R de la ligne géodésique tangente à la trajectoire. Quant aux formules (I) et (II), elles demeurent vraies toujours, et indépendamment de cette restriction.

encore par l'élimination de γ,

$$(IV) \qquad G^2 = \left(\frac{v^2}{r_g \sin V}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R} - N\right)^2.$$

Quant au rôle général de ces formules, on voit que la première fournira l'expression de la vitesse, toutes les fois du moins que l'intégration qui y est indiquée pourra être effectuée; et c'est ce qui arrivera dans toutes les applications que nous nous proposons de développer. La formule (II) donnera ensuite pour le rayon de courbure géodésique de la trajectoire, une valeur *particulière*, dont la comparaison avec l'expression *générale* du rayon de courbure géodésique d'une ligne quelconque tracée sur la surface considérée, fournira enfin l'équation différentielle, entre certaines *coordonnées à la surface*, de la trajectoire cherchée.

On pourra d'ailleurs, dans certains cas, se dispenser de l'intégration que suppose la formule (I), et qui exige quelquefois, comme nous le verrons, une discussion minutieuse des *signes*, en déterminant la vitesse par des considérations particulières.

Remarque I. Il est essentiel, au point de vue des applications que nous aurons à faire de ces formules, de remarquer que l'intégrale $\int \frac{e_g}{\tan V}$, qui figure, en exposant, dans la première, (et dans laquelle on regardera *l'angle* e_g *comme essentiellement positif, et* tang V *comme positive ou négative suivant que l'angle* V *sera aigu ou obtus*) a bien reçu le signe qui convient à la valeur de la vitesse. On déduit en effet, de cette formule,

$$dv = v \cdot \frac{e_g}{\tan V}.$$

Or, v et e_g étant positifs, on voit que les différentielles dv, $d.v^2$, seront positives ou négatives, suivant que l'angle V sera aigu, ou obtus. C'est ce qui doit être, en effet; car $\frac{1}{2}d.v^2$ est mesurée, en grandeur et en signe, par le travail élémentaire correspondant de la force; et ce travail, se réduisant à celui de la composante $G \sin \gamma$ qui fait un angle V avec la direction du

mouvement, est positif, ou négatif, suivant que l'angle V est aigu, ou obtus.

Remarque II. La formule (I), indépendamment du rôle important qu'elle doit jouer dans la suite de ces recherches, peut paraître curieuse en elle-même, si l'on remarque qu'elle fournit une expression analytique de la vitesse qui semble *indépendante de la grandeur de la force qui produit le mouvement*, et paraît ne dépendre que de la direction de cette force et de la forme de la trajectoire. Cette indépendance toutefois n'est qu'apparente : car, la direction des forces étant donnée, la forme même de la trajectoire dépend évidemment de la loi qui régit les variations de grandeur de ces forces.

§ II.

Du mouvement d'un point sur un cylindre.

115. Si nous supposons que la *projection de la force extérieure* G *sur le plan tangent soit dirigée en chaque point suivant la génératrice du cylindre*, V désignera dans les équations précédentes l'inclinaison de la trajectoire sur la génératrice; et l'on trouvera, pour la valeur absolue de l'angle de contingence *géodésique* de la trajectoire cylindrique, ou pour l'angle de contingence *absolue* de cette trajectoire *transformée* par le développement du cylindre sur un plan,

$$e_g = -dV,$$

l'angle, aigu ou obtus, V, que la direction du mouvement fait avec la direction de la force, allant constamment en diminuant.

L'intégrale $\int \frac{e_g}{\text{tang } V}$ contenue dans l'équation (I) devient alors

$$-\int \frac{\cos V \,.\, dV}{\sin V} = -\text{L} \,.\, \sin V;$$

et l'on en déduit

$$(1) \qquad v = \frac{C}{\sin V}.$$

Si l'on désigne, en outre, par ρ' le rayon de courbure de la ligne plane suivant laquelle se transforme la trajectoire cylindrique du mobile par le développement du cylindre sur un plan, on pourra remplacer r_g par ρ' dans la formule (II) qui deviendra

$$(2) \qquad \frac{v^2}{\rho'} = G \sin\gamma \,.\, \sin V.$$

Or les équations (1) et (2) sont précisément les équations qui définiraient le mouvement, *dans le plan*, d'un mobile soumis à l'action d'une force dont l'intensité, constante ou variable, serait mesurée en chaque point par $G \sin\gamma$, et qui serait parallèle à une direction fixe, V désignant alors l'angle de la tangente à la trajectoire avec cette direction. On a donc ce théorème général :

Un point matériel se mouvant sur un cylindre quelconque, sous l'influence de la réaction normale de la surface et d'une force extérieure dont la projection sur le plan tangent est dirigée, en chaque point, suivant la génératrice du cylindre : si, à une époque quelconque du mouvement, on suppose développés tout à coup sur un plan le cylindre et la trajectoire du mobile, et si l'on conçoit en outre que les forces qui produisaient le mouvement primitif, estimées suivant les génératrices, conservent, dans ce développement, leur direction et leur intensité; le mobile, sous l'influence de ces forces, continuera à décrire dans le plan, avec les mêmes vitesses aux mêmes points, la transformée *de la trajectoire qu'il eût décrite sur le cylindre.*

Quant à la pression exercée par le mobile sur la surface, on trouve d'abord, en remplaçant v par sa valeur actuelle (1) dans l'équation (III),

$$N = \frac{C^2}{R \sin^2 V} - G \cos\gamma.$$

D'ailleurs, si l'on désigne par ρ le rayon de courbure de la section droite du cylindre au point considéré, on a (*voir* page 7, formule I) pour le rayon de courbure de l'hélice

tangente à la trajectoire en ce point, et coupant par suite les génératrices du cylindre sous l'angle V,

$$R = \frac{\rho}{\sin^2 V};$$

d'où

$$\frac{1}{R \sin^2 V} = \frac{1}{\rho};$$

on a donc, définitivement,

$$(3) \qquad N = \frac{C^2}{\rho} - G \cos\gamma.$$

116. Il résulte du théorème précédent que tout ce que l'on sait sur le mouvement, dans le plan, d'un point matériel soumis à l'action d'une force constante ou variable, mais de direction fixe, peut être transporté au mouvement sur un cylindre quelconque.

Si l'on se place, en particulier, *dans le cas ordinaire de la pesanteur*, et si l'on suppose le cylindre *vertical*, on retrouve un résultat déjà obtenu par Euler, et qu'il énonce ainsi : *Curva ergo, quam corpus in superficie cylindri describit, si superficies in planum explicetur, abibit in parabolam, ipsam scilicet trajectoriam, quam corpus projectum in plano verticali describeret* (*Mechan.*, t. II, 97, coroll. I, p. 486). On a en outre, dans ce cas,

$$\gamma = \frac{\pi}{2},$$

et, par suite,

$$N = \frac{C^2}{\rho};$$

d'où l'on voit que *la pression* qui, dans le cas d'un cylindre quelconque, est proportionnelle en chaque point à la courbure de la section droite, *demeure constante quand le cylindre est de révolution;* ce qui est conforme aux résultats obtenus par Euler (page 487).

Remarque. La comparaison des deux formules

$$r_g = \frac{C^2}{g \sin^3 V}, \quad r_g = \frac{\rho \tang a}{\sin^2 V} \quad (\textit{voir page 130, formule 36}),$$

qui donnent le rayon de courbure géodésique de la parabole cylindrique et d'une ligne *quelconque* tracée sur le cylindre, conduit à la relation

$$\sin V . \tang a = \frac{C^2}{\rho . g} = C' = \text{constante},$$

dans le cas où le cylindre est *de révolution*. On en déduit aisément cette propriété, qui peut servir à la construction du plan osculateur : *En chaque point de la parabole cylindrique, la trace du plan osculateur de la courbe sur le plan de la section méridienne correspondante coupe l'axe du cylindre sous un angle constant.* Enfin on peut déduire de la même formule l'équation de l'indicatrice sphérique de la parabole cylindrique, ainsi que le rayon de courbure sphérique de cette indicatrice : et l'on trouve ainsi, pour les rayons de première et de seconde courbure de la parabole cylindrique, les valeurs suivantes :

$$r_1 = \frac{r_g}{\cos a} = \frac{\rho \sin a}{\sin^2 V}, \quad r_2 = \frac{\rho}{\sin^2 a . \sin V \cos V}, \quad r_1^2 . r_2 = \frac{\rho^3}{\sin^5 V . \cos V}.$$

117. Des formules et des conséquences semblables subsisteraient encore si l'on supposait la projection de la force sur le plan tangent dirigée en chaque point suivant la tangente à la section droite du cylindre, V désignant alors dans ces formules l'inclinaison de la trajectoire sur la section droite, ou le complément de son inclinaison sur la génératrice du cylindre.

§ III.

Du mouvement d'un point sur un cône.

118. Si l'on suppose, comme dans le § précédent, la projection de la force extérieure sur le plan tangent dirigée en chaque point suivant la génératrice du cône, V désignera,

dans les formules générales du § I, l'inclinaison de la trajectoire sur les génératrices du cône; et il suffira, pour obtenir les équations du mouvement, de déterminer l'expression de e_g, ou de l'angle de contingence de la trajectoire développée sur un plan, en même temps que le cône sur lequel elle est tracée.

Soient donc, mm' la trajectoire développée *tournant sa concavité vers le sommet* s, qui joue le rôle de centre des forces attractives; $sm = r$, $sm' = r + dr$, deux rayons vecteurs infiniment voisins formant entre eux un angle $d\theta$ et coupant la courbe en m, m' sous les angles *aigus* V et V + V. Si l'on mène les tangentes mt, $m't$, la valeur absolue e_g de leur angle sera donnée par l'équation

Fig. 52.

$$V + 2^{\text{dr}} - e_g + 2^{\text{dr}} - V - dV + d\theta = 4^{\text{dr}};$$

d'où

$$e_g = -dV + d\theta.$$

On a d'ailleurs, suivant une formule connue,

$$\text{tang}\, V = \pm r \frac{d\theta}{dr};$$

et comme on a suppposé, dans la figure, l'angle V aigu et la différentielle dr négative, on doit prendre le signe — dans cette formule, ce qui donne

$$d\theta = -\frac{dr}{r} \text{tang}\, V.$$

On a donc enfin,

$$e_g = -dV - \frac{dr}{r} \text{tang}\, V,$$

pour valeur absolue de l'angle de contingence géodésique de la trajectoire conique primitive.

L'intégrale $\int \frac{e_g}{\text{tang}\, V}$, contenue dans l'équation (I), devient alors

$$-\int \frac{dV}{\text{tang}\, V} - \int \frac{dr}{r} = -\text{L}.r \sin V;$$

la quantité $e^{\int \frac{e_g}{\tang V}}$ est égale à $\frac{1}{r \sin V}$, et l'on a

$$(1) \qquad v = \frac{C}{r.\sin V} = \frac{C}{p}.$$

Si l'on désigne, en outre, par ρ' le rayon de courbure de la ligne plane suivant laquelle se transforme la trajectoire conique du mobile par le développement du cône sur un plan, on pourra remplacer r_g par ρ' dans la formule (II), qui deviendra

$$(2) \qquad \frac{v^2}{\rho'} = G \sin\gamma . \sin V.$$

Or les équations (1) et (2) ne diffèrent en rien des équations qui définiraient le mouvement dans le plan d'un mobile soumis à l'action d'une force dont l'intensité, constante ou variable, serait mesurée en chaque point par $G \sin\gamma$, et qui serait constamment dirigée vers un centre fixe; r désignant alors la distance du mobile à ce centre; et V, l'inclinaison sur la trajectoire de la droite qui mesure cette distance. On a donc ce second théorème général :

Un point matériel se mouvant, sur un cône quelconque, sous l'influence de la réaction normale de la surface et d'une force extérieure dont la projection sur le plan tangent est dirigée en chaque point suivant la génératrice du cône; si, à un instant quelconque du mouvement, on suppose développés sur un plan le cône et la trajectoire du mobile, et si l'on conçoit en outre que les forces qui produisaient le mouvement primitif, estimées suivant les génératrices, conservent dans ce développement et leur intensité et leur direction, en concourant par suite au sommet du cône développé : le mobile, sous l'influence de ces forces, continuera à décrire dans le plan, avec les mêmes vitesses aux mêmes points, la transformée *de la trajectoire qu'il eût décrite sur le cône.*

Quant à la pression exercée par le mobile sur la surface, on trouve d'abord, en remplaçant v par sa valeur actuelle (1)

dans la formule (III)

$$N = \frac{C^2}{R \sin^2 V \cdot r^2} - G \cos \gamma.$$

On a d'ailleurs, en remplaçant i par V dans la formule (36') de la page 135,

$$R_1 . \sin^2 V = \sin a . r \operatorname{tang} A,$$

pour le rayon de courbure R_1 d'une ligne quelconque tracée sur un cône : a désignant dans cette formule l'inclinaison du plan osculateur de cette ligne sur le plan tangent; A, le demi-angle au sommet du cône droit, osculateur du cône proposé suivant la génératrice considérée; et r et V ayant la même signification que dans les formules précédentes. Si donc on veut déterminer le rayon de courbure R de la ligne géodésique tangente à la trajectoire au point considéré, il suffit de poser $a = \frac{\pi}{2}$ dans cette formule. Il en résulte

$$R \sin^2 V = r \operatorname{tang} A;$$

et la pression prend cette nouvelle forme

$$(3) \qquad N = \frac{C^2}{r^3 \operatorname{tang} A} - G \cos \gamma.$$

Corollaire. Il résulte du théorème précédent que les diverses propositions, relatives au mouvement plan d'un point soumis à l'action d'une force centrale, peuvent être transportées au mouvement sur un cône quelconque. Ainsi, par exemple, la trajectoire du mobile sera, sous certaine condition relative aux circonstances initiales du mouvement, une *hélice conique*, c'est-à-dire une trajectoire des génératrices rectilignes du cône, *si la force agissant sur le mobile tend constamment vers le sommet du cône, et si elle est inversement proportionnelle au cube de la distance du mobile au sommet.*

119. *Scolie.* Les résultats précédents, relatifs au cylindre et au cône, peuvent être généralisés, et étendus au mouvement d'un point sur une surface développable quelconque.

Considérons, en effet, la trajectoire d'un mobile sur une

pareille surface; développons celle-ci sur un plan, et désignons par e' et r' l'angle de contingence absolue et le rayon de courbure absolue de la transformée plane de la trajectoire primitive : on aura, d'après le théorème de M. Liouville (*voir* page 8),

$$e' = e_g, \quad r' = r_g;$$

et l'on pourra écrire simultanément les formules suivantes, identiquement équivalentes, deux à deux :

$$\text{(I)} \quad v = Ce^{\int \frac{e_g}{\tan g V}}, \qquad \text{ou} \qquad (1) \quad v = Ce^{\int \frac{e'}{\tan g V}};$$

$$\text{(II)} \quad \frac{v^2}{r_g} = G \sin \gamma . \sin V, \qquad \text{ou} \qquad (2) \quad \frac{v^2}{r'} = G \sin g \gamma . \sin V.$$

Or, les formules générales (I) et (II) sont applicables au mouvement dans le plan, pourvu qu'on y remplace les *éléments* relatifs à la courbure *géodésique* de la trajectoire par les éléments analogues relatifs à la courbure *absolue*. Les formules (1) et (2) définissent donc le mouvement, suivant la transformée plane de la trajectoire primitive, d'un mobile sollicité par une force, dont la grandeur est $G \sin \gamma$, et dont la direction fait un angle V avec la direction du mouvement. On a donc cet énoncé général : *Dans toute surface développable, la* trajectoire *d'un point matériel qui se meut sur la surface, et la* vitesse *du mobile en chaque point de la trajectoire,* se conservent, *dans le développement de la surface sur un plan; pourvu que la composante, suivant le plan tangent, de la force extérieure primitive conserve, dans le développement, sa grandeur absolue et son inclinaison par rapport à la trajectoire.*

IV.

Du mouvement sur la sphère.

120. *Hypothèses et notation.* Nous considérerons *exclusivement*, dans ce qui suit, le cas du mouvement sphérique d'un mobile soumis à la réaction normale de la surface et sollicité par une *force extérieure* G, *constamment située dans le*

plan déterminé par le mobile et par un diamètre fixe AA' *de la sphère*. Ce diamètre représentera, en particulier, la commune direction des forces extérieures, quand elles seront supposées parallèles; et son extrémité inférieure A pourra, dans tous les cas, recevoir le nom de *centre des forces concourantes*. Il résulte de cette hypothèse que la *composante suivant le plan tangent*, $G\sin\gamma$, de la force extérieure qui agit sur le mobile en m, est *dirigée suivant la tangente à l'arc de grand cercle* mA qui réunit le point m au point A; et que l'angle désigné précédemment par V n'est autre chose que l'inclinaison de l'arc Am sur la trajectoire mm'.

Nous prendrons donc le point A pour *origine des coordonnées polaires* $\rho =$ arc Am et ψ; et nous désignerons par p l'arc de grand cercle, abaissé de l'origine perpendiculairement à l'arc de grand cercle tangent à la trajectoire en m; l'arc p étant défini par l'équation $\sin p = \sin\rho \sin V$.

121. Cela posé, remarquons d'abord que la trajectoire du mobile est nécessairement située, par rapport au grand cercle tangent en l'un quelconque de ses points, du même côté que l'origine A des rayons vecteurs : car la composante utile de la force extérieure étant, par hypothèse, dirigée suivant la tangente au rayon vecteur sphérique qui aboutit au pôle A, son action a pour effet d'écarter le mobile du grand cercle qu'il décrirait avec sa vitesse actuelle, si cette force était supprimée, et de le rapprocher du pôle A. Nous devons donc, d'après la Remarque II de la page 43, écrire

$$r_g = \frac{ds}{e_g} = + \frac{\sin\rho \,.\, d\rho}{d \,.\, \sin p}$$

pour le rayon de courbure géodésique de la trajectoire; d'où

$$e_g = \frac{ds}{d\rho} \cdot \frac{d \,.\, \sin p}{\sin\rho}.$$

D'ailleurs, on a toujours, en grandeur et en signe,

$$\frac{ds}{d\rho} = -\frac{1}{\cos V};$$

il en résulte

$$e_g = -\frac{1}{\cos V} \cdot \frac{d.\sin p}{\sin \rho}, \quad \frac{e_g}{\operatorname{tang} V} = -\frac{d.\sin p}{\sin V \sin \rho} = -\frac{d.\sin p}{\sin p}:$$

$$\int \frac{e_g}{\operatorname{tang} V} = -\mathrm{L} \sin p;$$

et la substitution de cette dernière valeur dans la formule (I) de la page 186, nous donne d'abord,

$$(\mathrm{I}') \qquad v = \frac{C}{\sin p} = \frac{C}{\sin \rho \sin V}.$$

Donc : *La vitesse, en chaque point de la trajectoire, est inversement proportionnelle au* sinus *de la distance sphérique du centre des forces concourantes, à l'arc de grand cercle tangent à la trajectoire au point considéré.*

La formule (II)

$$r_g = \frac{v^2}{G \sin \gamma . \sin V},$$

donne ensuite, en remplaçant v par sa valeur (I'),

$$(\mathrm{II}') \qquad r_g = \frac{\sin \rho . d\rho}{d.\sin p} = \frac{C^2}{G \sin \gamma . \sin^2 p . \sin V};$$

et la formule (III), dans laquelle le rayon de courbure R de la ligne géodésique tangente à la trajectoire sera remplacé par le rayon de la sphère qui a été pris déjà pour unité, nous donnera enfin

$$(\mathrm{III}') \qquad \mathrm{N} = \frac{v^2}{1} - G \cos \gamma,$$

pour la pression exercée par le mobile sur la surface.

Telles sont les équations générales définissant les diverses circonstances du mouvement sphérique d'un point soumis à l'action de forces que l'on peut appeler *concourantes;* la seconde fournira l'équation différentielle, entre certaines coordonnées sphériques, de la trajectoire cherchée, quand, après avoir particularisé la loi des forces, on y remplacera $G \sin \gamma$ par la valeur qui répond à la loi supposée; et sous leur forme gé-

nérale actuelle, les équations (I′) et (II′) sont analogues aux formules connues

$$(1') \qquad v = \frac{C}{p}, \qquad\qquad (2') \qquad \rho' = \frac{C^2}{G.p^2 \sin V},$$

qui définissent, à chaque instant, la vitesse et le rayon de courbure ρ' de la trajectoire d'un point matériel se mouvant, dans un plan, sous l'action d'une force *centrale*. Nous verrons d'ailleurs que cette analogie, ainsi constatée d'une manière générale, ne disparaît pas dans les applications et devient, au contraire, plus frappante, quand on particularise, d'une manière semblable, la loi des forces qui produisent le mouvement sur la sphère et sur le plan.

Scolie. Les formules précédentes sont les seules que nous nous proposions d'employer. Nous établirons néanmoins deux autres formules, analogues à celles de M. Binet, et fournissant, en fonction des coordonnées sphériques ρ et ψ de la trajectoire, les expressions générales de la vitesse du mobile et de la force *centrale* qui accélère le mouvement.

On a d'abord

$$v^2 = \frac{d\rho^2 + \sin^2\rho . d\psi^2}{dt^2}, \quad \text{et} \quad \sin^2\rho . d\psi = C\,dt,$$

C désignant une constante; cette dernière relation provenant de ce que la projection du mobile, sur un plan perpendiculaire au diamètre central, décrit des aires proportionnelles aux temps.

On a donc, par l'élimination du temps,

$$v^2 = C^2\left[\frac{1}{\sin^2\rho} + \left(\frac{\frac{d\rho}{\sin^2\rho}}{d\psi}\right)^2\right]$$

ou

$$(IV) \qquad v^2 = C^2\left[\frac{1}{\sin^2\rho} + \left(\frac{d\frac{1}{\tang \rho}}{d\psi}\right)^2\right].$$

Cette formule n'est d'ailleurs que la traduction, sous forme

différentielle, de l'équation (I')

$$(\mathrm{I}') \qquad v = \frac{C}{\sin p} = \frac{C}{\sin \rho . \sin V}.$$

Si l'on désigne ensuite par R la composante de la force extérieure suivant le plan tangent à la sphère, composante dirigée suivant la tangente au grand cercle qui joint le mobile au point central A; on aura, d'après le principe des forces vives, et en regardant la composante R comme positive quand elle tend à rapprocher le mobile du point central,

$$d.v^2 = \pm 2 R \cos V . dS = -2 R . d\rho,$$

ou

$$\frac{d.v^2}{d\psi} = -2 R . \frac{d\rho}{d\psi}.$$

De là, en différentiant l'équation (IV), en substituant et supprimant le facteur commun $-2\frac{d\rho}{d\psi}$,

$$R = C^2 \left[\frac{\cos \rho}{\sin^3 \rho} + \frac{1}{\sin^2 \rho} . \frac{d^2\left(\frac{1}{\tang \rho}\right)}{d\psi^2} \right],$$

que l'on peut écrire

$$(\mathrm{V}) \qquad R = \frac{C^2}{\sin^2 \rho} \left[\frac{1}{\tang \rho} + \frac{d^2\left(\frac{1}{\tang \rho}\right)}{d\psi^2} \right].$$

Les formules qui correspondent au problème analogue dans le plan sont, comme on sait,

$$(4) \quad v^2 = C^2 \left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\psi} \right)^2 \right], \qquad (5) \quad R = \frac{C^2}{r^2} \left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\psi^2} \right].$$

Applications.

122. *Première application : au pendule sphérique.*

Si l'on suppose la *force extérieure constante, en grandeur et en direction,* on retombe sur le problème du pendule sphé-

rique; et les formules précédentes, dans lesquelles on doit remplacer G par g et γ par $\pi - \rho$, deviennent, par ces substitutions,

$$(X) \qquad v = \frac{C}{\sin p} = \frac{C.}{\sin \rho . \sin V},$$

$$(Y) \qquad r_g = \frac{\sin \rho . d\rho}{d . \sin p} = \frac{C^2}{g . \sin^3 p},$$

$$(Z) \qquad N = \frac{v^2}{1} + g \cos \rho;$$

on en déduit aisément les équations ordinaires, représentant la trajectoire décrite par l'extrémité du pendule et les circonstances principales de son mouvement.

En effet, l'intégration de l'équation (Y) ou, plus simplement encore, la comparaison de la formule (X) à la formule ordinaire

$$v^2 = v_0^2 + 2g(z - z_0) = 2g(\cos \rho + h - \cos \rho_0),$$

donne d'abord

$$(1) \qquad \sin^2 p (\cos \rho + h - \cos \rho_0) = \frac{C^2}{2g},$$

ou

$$(1') \qquad \sin^2 \rho (\cos \rho + h - \cos \rho_0) . \sin^2 V = \frac{C^2}{2g}.$$

On a d'ailleurs

$$\tang V = \sin \rho : \frac{d\rho}{d\psi} = \frac{\sin \rho}{\rho'}, \quad \sin V = \frac{\sin \rho}{\sqrt{\rho'^2 + \sin^2 \rho}};$$

et si, portant cette valeur dans (1'), on résout par rapport à ρ', il vient

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\psi} = \sin \rho \frac{\sqrt{\sin^2 \rho (\cos \rho + h - \cos \rho_0) - \frac{C^2}{2g}}}{\sqrt{\frac{C^2}{2g}}};$$

de là, en posant $\cos\rho = z$, $\sin^2\rho = 1 - z^2$, $\frac{d\rho}{d\psi} = \frac{dz : d\psi}{\sqrt{1-z^2}}$,

$$(X_1) \qquad d\psi = \frac{\sqrt{\frac{C^2}{2g}} \cdot dz}{(1-z^2)\sqrt{(1-z^2)(z+h-z_0) - \frac{C^2}{2g}}}.$$

L'équation (X), appliquée aux données initiales du mouvement, fournit d'ailleurs immédiatement l'expression de la constante, à savoir

$$C^2 = v_0^2 \sin^2\rho_0 \sin^2 V_0 = 2gh \sin^2\rho_0 \sin^2 V_0,$$

d'où

$$(\xi_1) \qquad \frac{C^2}{2g} = h \sin^2\rho_0 . \sin^2 V_0 = h(1 - z_0^2) \sin^2 V_0.$$

Enfin, l'on tire successivement de l'équation (X)

$$\frac{ds}{dt} = \frac{C}{\sin\rho . \sin V},$$

$$dt = \frac{1}{C}\sin\rho . ds \sin V = \frac{1}{C}\sin\rho . \sin\rho\, d\psi = \frac{d\psi . \sin^2\rho}{C} = \frac{(1-z^2)\, d\psi}{C},$$

$$d\psi = \frac{C\, dt}{1-z^2},$$

dont la comparaison à la relation (X_1) conduit à cette autre formule

$$(X_2) \qquad dt = \frac{dz}{\sqrt{2g} . \sqrt{(1-z^2)(z+h-z_0) - \frac{C^2}{2g}}}.$$

Quant à la pression, la formule (Z) devient, dans notre nouvelle notation,

$$(X_3) \qquad N = \frac{v^2}{1} + gz;$$

et les formules (X_1), (X_2), (X_3) sont identiques à celles que l'on obtient par l'emploi de la méthode analytique ordinaire.

123. Les formules (X) et (Y) mettent en outre en évidence des analogies remarquables, et non encore observées, entre le

mouvement de l'extrémité du pendule sphérique et le mouvement plan d'un point matériel attiré par un centre fixe proportionnellement à la distance.

On sait, en effet, et c'est un des premiers théorèmes découverts par Newton sur les forces centrales, que *la vitesse en un point quelconque de la trajectoire elliptique plane est inversement proportionnelle à la distance du centre attirant à la tangente en ce point; le rayon de courbure de l'ellipse en ce point étant en raison inverse du cube de la même distance* : et il résulte de nos formules que *dans le mouvement sphérique considéré, la vitesse en chaque point est encore inversement proportionnelle au* sinus *de la distance sphérique du point central* A *de la sphère à l'arc de grand cercle tangent à la trajectoire en ce point, le rayon de courbure géodésique de la trajectoire étant, de même, en raison inverse du cube du même sinus.*

On aperçoit aisément d'ailleurs la cause première, l'origine de ces analogies; car, dans le mouvement sphérique, la composante de la gravité suivant le plan tangent à la sphère est, en chaque point, dirigée suivant la tangente à l'arc de grand cercle mA qui joint ce point au point central A, et la grandeur de cette composante est proportionnelle au *sinus* du même arc.

Les analogies des deux mouvements, assez intimes comme on le voit, s'arrêtent cependant aux trajectoires elles-mêmes; et la courbe décrite par l'extrémité du pendule n'est pas une ellipse sphérique (*voir* p. 205 la cinquième application).

124. Les formules (X) et (Y) permettent encore de déterminer d'une manière très-simple *quelles doivent être les circonstances initiales du mouvement pour que la trajectoire décrite par l'extrémité du pendule soit un petit cercle de la sphère;* sans ajouter, comme on le fait ordinairement, cette restriction inutile que *le petit cercle soit horizontal.*

Pour que la trajectoire, en effet, soit un petit cercle, il faut et il suffit que son rayon de courbure géodésique soit constant; ou, d'après la formule (Y), que l'arc p demeure constant. Mais on voit immédiatement dès lors, que les arcs p et ρ coïncident,

et que le petit cercle considéré est nécessairement horizontal : en même temps les formules (X) et (Y), dans lesquelles on remplace r_g par $\tan g\,\rho$ et p par ρ, deviennent

$$v^2 = \frac{C^2}{\sin^2 \rho}, \quad C^2 = g\,\frac{\sin^4 \rho}{\cos \rho};$$

d'où

$$v^2 = g \cdot \frac{\sin^2 \rho}{\cos \rho}.$$

Il en résulte que la vitesse est constante; et, en particulier, que la grandeur de la vitesse initiale est définie par la relation

$$(x_1) \qquad v_0^2 = g \cdot \frac{\sin^2 \rho_0}{\cos \rho_0} = g \cdot \frac{1 - z_0^2}{z_0}:$$

cette vitesse étant d'ailleurs dirigée suivant la tangente au petit cercle, et étant dès lors perpendiculaire au plan vertical du point de départ.

125. *Seconde application.* La formule (Y), dans laquelle on remplacera le nombre constant g par le nombre indéterminé G, peut servir, en particulier, à déterminer *la loi générale des forces parallèles capables de produire un mouvement circulaire.*

Si l'on regarde, en effet, r_g comme constant dans cette formule, on en déduit

$$(x_2) \qquad G = \frac{C'}{\sin^3 p}$$

pour expression de la force en chaque point de la trajectoire circulaire, C' désignant une constante : et l'on voit que si la force G est constante, il en est de même de p, et le cercle décrit par le mobile est horizontal; tandis que si la force est variable, il en sera de même de p, et la trajectoire du mobile sera un petit cercle quelconque de la sphère.

Si, au lieu de considérer la valeur absolue de la force, on a seulement égard à sa composante *utile* $G \sin \rho$, on déduit, de la formule précédente,

$$(x'_2) \qquad G' = G \sin \rho = \frac{C'}{\sin^2 \rho \cdot \sin^3 V}$$

pour expression de cette composante : et cette formule est analogue à la formule connue

$$G' = \frac{C'}{r^2 \sin^3 V},$$

qui définit la loi des forces centrales capables de produire, dans le plan, le mouvement circulaire d'un mobile.

126. *Troisième application*. Proposons-nous de déterminer *la loi des forces parallèles* G, *capables de faire parcourir au mobile une ellipse sphérique ayant le pôle* A *pour l'un de ses foyers*.

Nous avons trouvé, pour le rayon de courbure géodésique de l'ellipse sphérique rapportée à l'un de ses foyers A (*voir* p. 45, formule 11),

$$r_g = \frac{2\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha-\gamma)}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{1}{\sin^3 V} = \frac{k}{\sin^3 V},$$

k désignant une constante; et la comparaison de cette valeur à la suivante

$$r_g = \frac{C^2}{G \sin^3 p} = \frac{C^2}{G \sin^3 \rho \,.\, \sin^3 V}$$

déduite de la formule (Y) en y remplaçant g par l'indéterminée G, donne, pour expression de la force cherchée,

$$G = \frac{C^2}{k} \cdot \frac{1}{\sin^3 \rho},$$

ou

$$(x_3) \qquad G = \frac{C^2 \sin 2\alpha}{2\sin(\alpha+\gamma)\sin(\alpha-\gamma)} \cdot \frac{1}{\sin^3 \rho} = \frac{C'}{\sin^3 \rho};$$

et

$$(x'_3) \qquad G \sin \rho = \frac{C'}{\sin^2 \rho}:$$

C' désignant une nouvelle constante.

127. *Quatrième application*. Demandons-nous encore, quelle est *la loi des forces parallèles, capables de faire par-*

courir au mobile une loxodromie sphérique ayant pour pôle le point A?

Nous pourrons encore, pour résoudre le problème le plus simplement possible, employer la formule (13) de la page 47,

$$r_g = \frac{\tang \rho}{\sin V} = \frac{\sin \rho}{\sin V \cdot \cos \rho},$$

qui donne le rayon de courbure géodésique de la loxodromie sphérique; et sa comparaison avec la formule (Y) nous donnera

$$\frac{C^2}{G \sin^3 \rho \cdot \sin^3 V} = \frac{\sin \rho}{\sin V \cdot \cos \rho}.$$

Delà, en remarquant que V est ici une constante,

$$(x_4) \qquad G = \frac{C^2}{\sin^2 V} \cdot \frac{\cos \rho}{\sin^4 \rho} = C' \cdot \frac{\cos \rho}{\sin^4 \rho},$$

et

$$(x_4) \qquad G \sin \rho = \frac{C' \cdot \cos \rho}{\sin^3 \rho}.$$

128. *Cinquième application. Déterminer la loi des forces parallèles capables de faire parcourir au mobile une ellipse sphérique ayant pour centre le point* A.

La comparaison de la formule (Y),

$$r_g = \frac{C^2}{G \cdot \sin^3 p},$$

à la formule (10) de la page 44,

$$r_g = a^2 b^2 \cdot \frac{\cos^3 \rho}{\sin^3 p},$$

qui exprime le rayon de courbure géodésique d'une ellipse sphérique rapportée à son centre, donne immédiatement, pour la force G capable du mouvement dont il s'agit,

$$(x_5) \qquad G = \frac{C^2}{a^2 b^2} \cdot \frac{1}{\cos^3 \rho},$$

et

$$(x'_5) \qquad G \sin \rho = \frac{C^2}{a^2 b^2} \cdot \frac{\sin \rho}{\cos^3 \rho}.$$

On a d'ailleurs, pour la pression exercée par le mobile sur la surface,

$$N = \frac{v^2}{1} + G \cos \rho = \frac{C^2}{\sin^2 p} + \frac{C^2}{a^2 b^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \rho},$$

ou

$$N = C^2 \left(\frac{1}{\sin^2 p} + \frac{1 + \operatorname{tang}^2 \rho}{a^2 b^2} \right);$$

et si l'on remplace dans le second membre $\frac{1}{\sin^2 p}$ par sa valeur tirée de l'équation (C), page 44, il vient

$$N = C^2 \left(\frac{a^2 b^2 + a^2 + b^2 - \operatorname{tang}^2 \rho}{a^2 b^2} + \frac{1 + \operatorname{tang}^2 \rho}{a^2 b^2} \right) = C^2 . \frac{1 + a^2 + b^2 + a^2 b^2}{a^2 b^2}$$

ou

$$(z) \qquad N = C^2 . \frac{(1 + a^2)(1 + b^2)}{a^2 b^2} = \frac{C^2}{\sin^2 \alpha . \sin^2 \beta} = \text{constante}.$$

Il résulte, de la proposition 8 du livre des *Principes*, que *l'ellipse plane peut être décrite par un mobile soumis à une force attractive, perpendiculaire à l'axe de l'ellipse, et inversement proportionnelle au cube de la distance à l'axe*. Et il résulte de même des formules précédentes que *l'ellipse sphérique peut être décrite par un mobile sollicité par une force répulsive, perpendiculaire au plan du grand cercle qui a pour pôle le centre de l'ellipse, et inversement proportionnelle au cube de sa distance à ce plan; la réaction exercée par la sphère sur le mobile étant d'ailleurs constante.*

Remarque I. L'ellipse plane, considérée comme section du cône, peut être placée sur le cylindre; et il en est de même de l'ellipse sphérique : car cette courbe étant, par définition, l'intersection d'un cône de second degré et d'une sphère *concentriques*,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{1} = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

elle appartient à l'un quelconque des trois cylindres du second degré, dont on obtient les équations en éliminant alternativement z, y ou x entre les deux équations précédentes. Par la première élimination on trouve

$$x^2\frac{1+a^2}{a^2}+y^2\frac{1+b^2}{b^2}=1, \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{\sin^2\alpha}+\frac{y^2}{\sin^2\beta}=1:$$

et l'ellipse que représente cette équation dans le plan des xy peut être considérée comme la trajectoire d'un mobile soumis aux projections des forces N et G sur ce plan. Mais la projection de la dernière est nulle; la projection de la première passe constamment par le centre de l'ellipse : elle est donc proportionnelle au rayon vecteur de la projection; et l'on parvient ainsi, d'une manière intuitive, à la conclusion que la réaction primitive N est constante.

On peut calculer aisément la durée commune $T=T'$ de la révolution du mobile projeté sur l'ellipse plane, ou du mobile primitif sur l'ellipse sphérique. Car si l'on désigne par ρ', v' et N' le rayon vecteur du mobile projeté, sa vitesse et la force qui le sollicite, on aura, en employant des formules connues,

$$v'=\frac{2C'}{p'}, \quad N'=\frac{4C'^2}{a'^2b'^2}\cdot\rho', \quad T'=\frac{\pi a'b'}{C'},$$

et de là, en remplaçant T', a', b' par T, $\sin\alpha$, $\sin\beta$, et déduisant la valeur de C', en fonction de C, de la comparaison des formules

$$(s)\qquad N=\frac{C^2}{\sin^2\alpha\sin^2\beta} \quad \text{et} \quad N'=N.\rho'=\frac{4C'^2}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}\cdot\rho',$$

il vient

$$(t)\qquad T=\frac{\pi\sin\alpha\sin\beta}{C'}=\frac{2\pi\sin\alpha.\sin\beta}{C}=\frac{2\pi}{\sqrt{N}}.$$

La durée de la révolution sera donc la même pour toutes les trajectoires elliptiques dans lesquelles la pression exercée par le mobile sur la surface aura la même valeur.

Remarque II. La projection de l'ellipse sphérique sur le

plan des xz est encore une ellipse plane si $a > b$, et cette projection peut être considérée comme la trajectoire d'un mobile qui serait soumis *premièrement*, à une force attractive N', émanant du centre de l'ellipse et proportionnelle à la distance; *secondement*, à une force répulsive $G' = G$, dirigée perpendiculairement à l'axe horizontal de l'ellipse et inversement proportionnelle au cube de la distance à cet axe. D'ailleurs l'ellipse *entière* n'est que la trajectoire *théorique* du mobile, la trajectoire *réellement parcourue* se réduisant à *un arc déterminé* de cette ellipse, intérieur à la sphère, et limité par une corde parallèle à l'axe horizontal. Le mobile oscille donc indéfiniment dans cet arc, sa vitesse devenant nulle à chacune de ses extrémités, et la durée d'une double oscillation étant définie par la formule (t). Enfin les oscillations dans deux arcs déterminés, appartenant à deux ellipses distinctes, seront *isochrones* toutes les fois que les forces centrales, qui concourent aux mouvements oscillatoires produits le long de ces arcs, auront la même valeur à une même distance du centre. Ces résultats ont quelque analogie avec le fait, observé par Lagrange et Legendre, et expliqué d'une manière générale par M. O. Bonnet, de la conservation de la trajectoire dans la superposition de diverses forces capables, *isolément*, d'une même trajectoire (*Journal de Mathématiques*, 1844, tome IX, page 113).

129. *Scolie.* Les formules précédentes, qui donnent la loi des forces capables de faire parcourir au mobile un petit cercle, une loxodromie ou une ellipse sphérique, présentent une intime analogie avec les formules correspondantes, relatives au mouvement plan d'un point matériel soumis à l'action d'une force centrale. Il convient néanmoins, pour la faire ressortir d'une manière plus complète, de n'avoir égard, dans les formules relatives au mouvement sphérique, qu'à la composante *utile* $G \sin \rho$ de la force extérieure, et non à la valeur absolue G de cette force.

§ V.

Du mouvement d'un point sur une surface de révolution.

130. On a, pour l'angle de contingence géodésique e_g d'une ligne quelconque tracée sur une surface de révolution (*voir* page 122, formule 33 *bis*),

$$(A) \qquad e_g = -\left(dV + \frac{\sin V}{\cos V} \cdot \frac{dr}{r}\right),$$

V désignant l'inclinaison de cette ligne, au point considéré, sur la section méridienne passant par ce point, et r le rayon du parallèle correspondant.

Si donc on suppose que la ligne considérée soit la trajectoire d'un mobile soumis à la réaction normale de la surface et *à une force extérieure constamment dirigée dans le plan de la section méridienne*, la projection de cette force sur le plan tangent sera toujours dirigée suivant la tangente à la section méridienne; la lettre V aura la même signification dans l'équation précédente et dans les formules générales (I), (II) et (III) de la page 186 : et l'on aura, en remplaçant dans la première de ces formules e_g par sa valeur,

$$\int \frac{e_g}{\tang V} = -\int \frac{dV}{\tang V} - \int \frac{dr}{r} = -\text{L}\ r \sin V;$$

et, par suite,

$$(I'') \qquad v = \frac{C}{r.\sin V},$$

C désignant une constante. La formule (II) deviendra alors

$$(II'') \qquad r_g = \frac{v^2}{G \sin\gamma . \sin V} = \frac{C^2}{G \sin\gamma . r^2 \sin^3 V};$$

et l'on aura toujours, pour la pression,

$$(III'') \qquad N = \frac{v^2}{R} - G \cos\gamma.$$

131. Sans nous arrêter à la discussion du signe — qui figure au second membre de la formule (A), proposons-nous de déterminer directement l'expression de la vitesse.

Nous remarquerons, à cet effet, que, par suite de l'hypothèse sur la direction de la force extérieure, le mobile peut être considéré comme se mouvant librement dans l'espace, sous l'action d'une force unique rencontrant constamment l'axe oz de la surface : il en résulte que la projection du mobile sur un plan perpendiculaire à l'axe décrit des aires proportionnelles aux temps ; et l'on a

$$r^2\,d\omega = C\,dt,$$

C désignant une constante. On a, d'ailleurs,

$$ds = v\,.\,dt\,;$$

et l'on déduit, de la combinaison de ces deux relations,

$$v = \frac{C}{r^2\dfrac{d\omega}{ds}} = \frac{C}{r\,.\,\dfrac{rd\omega}{ds}} = \frac{C}{r\sin V}\,.$$

On voit que cette formule renferme celle que nous avons déjà donnée sur le mouvement sphérique d'un point matériel ; et qu'elle est comprise elle-même dans l'observation de Newton, qui a été rappelée au commencement de ce chapitre.

132. *Applications*. Proposons-nous de déterminer *quelles doivent être les circonstances initiales du mouvement, pour que le mobile parcoure, dans le cas ordinaire de la pesanteur, un parallèle de la surface*.

On aura, dans ce cas (*voir* fig. 53),

$$V = \frac{\pi}{2}, \quad r = \text{constante} = r_0, \quad r_g = \frac{r}{\cos i}, \quad \text{et} \quad \gamma = \pi - i\,:$$

i désignant l'angle aigu que fait avec l'axe la normale à la surface. On trouve, par la substitution de ces valeurs dans les équations (I) et (II),

$$v = v_0 = \frac{C}{r} = \text{constante}, \quad \frac{r}{\cos i} = \frac{C^2}{g\sin i\,.\,r^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{C}{r} = \sqrt{gr.\,\tan i}\,:$$

et la comparaison de ces formules donne

$$(\text{A}) \qquad v = \sqrt{g \cdot r \cdot \tang i}$$

pour la grandeur de la vitesse initiale, qui devra d'ailleurs être dirigée perpendiculairement au plan vertical passant par le point de départ.

Le mouvement du mobile sera donc uniforme, et la durée de sa révolution sur le parallèle sera donnée par la formule

$$\text{T} = 2\pi \cdot \frac{r}{v}, \quad \text{ou} \quad \text{T} = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g \cdot \tang i}} = 2\pi \sqrt{\frac{\text{S.N}}{g}};$$

S.N désignant la sous-normale de la section méridienne, au point de rencontre de cette section et du parallèle décrit par le mobile : *Cette durée est donc égale à celle de l'oscillation* totale *d'un pendule simple, d'une longueur égale à la sous-normale* (Euler, *Mechanica*, t. II, p. 492).

Si la surface est un paraboloïde de révolution, les *temps périodiques* seront égaux pour tous les parallèles ; et la longueur du pendule simple effectuant une oscillation totale, dans le même temps, sera égale au demi-paramètre de la parabole méridienne (Huygens, *Horologium oscillatorium*, p. 160, VI ; Euler, *Mechanica*, t. II, p. 493).

On trouve d'ailleurs pour la pression normale, en remplaçant dans la formule (III') R par $\frac{r}{\sin i}$ et γ par $\pi - i$,

$$\text{N} = \frac{v^2}{r} \sin i + g \cos i;$$

et de là, en ayant égard à l'expression actuelle (A) de la vitesse, et en simplifiant,

$$(\text{B}) \qquad \text{N} = \frac{g}{\cos i}.$$

133. Proposons-nous encore de déterminer *quelle doit être la section méridienne d'une surface de révolution, pour qu'un mobile parcoure sur cette surface une loxodromie, sous l'action d'une gravité constante.*

Il suffit, pour résoudre ce problème, de comparer la formule (II''), qui donne l'expression générale du rayon de courbure géodésique de la trajectoire, à cette formule (*voir* p. 125, formule 35)

Fig. 53.

$$r_g = \frac{r}{\sin V \,.\, \cos i} = \frac{r}{\sin V \,.\, \cos \gamma},$$

qui représente le rayon de courbure géodésique d'une loxodromie coupant, sous l'angle constant V, les divers méridiens de la surface.

On déduit de cette comparaison l'égalité

$$\frac{r}{\sin V \,.\, \cos \gamma} = \frac{C^2}{g \sin \gamma \,.\, r^2 \sin^3 V},$$

ou

$$r^3 \operatorname{tang} \gamma = \frac{C^2}{g \sin^2 V} = C',$$

C' désignant une nouvelle constante. De là, en posant (*voir* la figure) $r = x$, $\operatorname{tang} \gamma = \operatorname{tang} i = \frac{dy}{dx}$,

$$\frac{dx}{x^3} = \frac{dy}{C'}.$$

On en déduit

$$x^2 y = \text{constante}$$

pour équation de la section méridienne de la surface cherchée; et cette section, comme on voit, est une courbe hyperbolique du troisième degré, appartenant à la 69e espèce de l'énumération newtonienne.

§ VI.

Du mouvement d'un point sur une classe particulière de surfaces gauches, dans le cas où la courbe décrite par le mobile est une trajectoire des génératrices rectilignes de la surface.

134. On a, pour le rayon de courbure géodésique d'une trajectoire sous l'angle V des génératrices rectilignes d'une

surface gauche quelconque (*voir* page 148, formule 40'),

$$(1)\qquad R_{1,g} = \frac{ds}{e_g} = \frac{1+k^2R^2}{k^2R}\cdot\frac{1}{\sin V},$$

d'où l'on déduit, successivement,

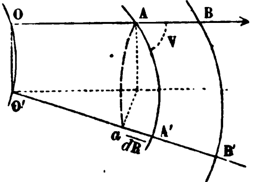
$$e_g = \frac{k^2R}{1+k^2R^2}\cdot\sin V.ds,$$

$$\frac{e_g}{\tang V} = \frac{k^2R}{1+k^2R^2}\cdot\cos V.ds,$$

$$(2)\qquad \frac{e_g}{\tang V} = \frac{k^2R.dR}{1+k^2R^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{d(1+k^2R^2)}{1+k^2R^2},$$

si l'on regarde *la surface gauche comme engendrée par les bi-normales d'une ligne à double courbure dont la seconde courbure demeure constante :* auquel cas on a

Fig. 54.



$$dR = ds.\cos V,$$

ainsi que

$$(A)\qquad \begin{cases} \varpi' = 0, \\ \text{et } k = \text{constante} \end{cases}$$

(*voir* la notation de la page 144).

Cela posé, si l'on regarde la trajectoire actuelle comme décrite par un mobile soumis à la réaction normale de la surface et à une force extérieure G, dirigée en chaque point suivant la génératrice rectiligne OA de la surface; en transportant la valeur (2) de $\frac{e_g}{\tang V}$ dans la formule (I) de la page 186, et la valeur résultante de v, ainsi que la valeur (1) de $R_{1,g} = r_g$, dans la formule (II) de la même page, on aura ces deux équations :

$$(I')\qquad v = C\sqrt{1+k^2R^2} = \frac{C}{\cos\varphi},$$

$$(II')\qquad G = C^2.k^2.R.$$

Elles conduisent à cet énoncé très-simple : *Les forces, dirigées suivant les génératrices de la surface, et capables de faire*

parcourir au mobile une trajectoire de ces génératrices, sont proportionnelles aux segments interceptés sur les génératrices entre la trajectoire et la ligne de striction de la surface; et la vitesse du mobile en chaque point, estimée suivant la tangente au point correspondant de la ligne de striction, demeure constante; cette dernière propriété résultant de la formule (I') que l'on peut écrire, l'angle V étant constant,

$$v \sin V . \cos \varphi = C \sin V = \text{constante}.$$

Il résulte encore de là une autre propriété curieuse, relative aux mouvements simultanés de *deux mobiles lancés en même temps, de deux points situés sur une même génératrice, et suivant une même inclinaison* V *par rapport à cette génératrice.* On aura, en effet, à une époque quelconque du mouvement simultané des deux mobiles,

$$v \sin V \cos \varphi = C \sin V, \quad G = C^2 k^2 R;$$
$$v' \sin V \cos \varphi' = C' \sin V, \quad G' = C'^2 k^2 R'.$$

Si donc on pose

$$\text{(B)} \qquad \frac{C}{C'} = 1, \quad \text{ou} \quad \frac{G}{G'} = \frac{R}{R'},$$

on aura, successivement,

$$v \sin V \cos \varphi = v' \sin V \cos \varphi',$$
$$\frac{ds}{dt} \sin V \cos \varphi = \frac{ds'}{dt} \sin V \cos \varphi',$$
$$d\sigma = d\sigma',$$

$d\sigma$ et $d\sigma'$ désignant les projections sur la ligne de striction des arcs décrits dans le même temps dt par les deux mobiles : or, il résulte de cette égalité, et en ayant égard à la restriction exprimée par la relation (B), que *les deux mobiles se trouvent toujours, à une époque quelconque du mouvement, sur la même génératrice de la surface.*

Ces résultats sont immédiatement applicables à l'*héliçoïde gauche à plan directeur*, qui est du nombre des surfaces repré-

sentées par les équations (A). On en déduit, en particularisant l'angle V, la description, par le mouvement d'un point, des lignes de courbure de cette surface, qui coïncident, comme on sait, avec les trajectoires sous l'angle de 45 degrés des génératrices rectilignes de la surface.

§ VII.

De la brachistochrone sur une surface de révolution.

135. L'étude du mouvement libre d'un point dans le plan a pour complément ordinaire l'étude du mouvement d'un point assujetti à demeurer sur une courbe plane donnée. Il conviendrait donc de compléter de la même manière l'étude du mouvement d'un point sur une surface. L'un des problèmes les plus intéressants, auxquels donne lieu cette étude complémentaire, est celui qui a pour objet de déterminer *quelle est, parmi toutes les lignes qui, sur une surface donnée, réunissent deux points donnés, celle qui serait parcourue dans un temps minimum par un mobile soumis à des forces extérieures données.*

Ce problème, déjà résolu par M. Roger à l'aide du calcul des variations, est susceptible d'une solution élémentaire pour certaines surfaces particulières, et notamment pour les surfaces de révolution. En effet, *de ce que deux portions d'une pareille surface, adjacentes à un même parallèle, sont superposables,* il résulte que la solution, donnée par Maclaurin, du problème analogue dans le plan, leur est exactement applicable. C'est ce que nous allons faire voir en terminant.

1). Soit AMM'B la brachistochrone cherchée, issue du point donné A, et coupant en B le méridien donné OBO'. Traçons sur la surface les parallèles A*b*, B*a* terminés aux méridiens des points A et B. Il est facile de voir que la ligne cherchée coupe orthogonalement le méridien OBO', et qu'elle est tout entière comprise dans le trapèze curviligne A*b*B*a*. Nous la chercherons donc parmi les lignes qui satisfont à ces conditions et qui joignent le point A au point *indéterminé* B;

et d'ailleurs, toutes ces lignes, projetées suivant des méridiens sur le parallèle aB, auront même projection, à savoir l'arc aB.

Quant à la loi des forces extérieures qui produisent le mouvement, nous supposerons seulement : 1° que la force extérieure, en chaque point de la surface, soit située dans le plan de la section méridienne, de telle sorte que la *composante active* de cette force, qui produit le *travail* et les variations de vitesse du mobile, soit constamment dirigée suivant la tangente à la section méridienne; 2° que la *composante active* de la force extérieure ait la même valeur pour tous les points de la surface situés sur un même parallèle : ces conditions se trouveraient réalisées, en particulier, dans le cas ordinaire de la pesanteur, l'axe de la surface étant supposé vertical; ou encore, dans le cas, plus général, d'une gravité toujours parallèle à l'axe de la surface, mais variable d'un parallèle à l'autre, et constante pour un même parallèle.

Il résulte, de ces conditions, que *la vitesse d'un mobile qui parcourrait successivement les diverses trajectoires* AMB, AM_1B, *serait la même pour les points de ces trajectoires situés sur un même parallèle;* et, en particulier, que *la vitesse acquise en* B, *par la chute sur l'une d'elles, serait la même pour toutes :* soit v_1 cette dernière vitesse.

2). Cela posé, le temps par AMB parcouru avec la vitesse variable v, ou $\mathfrak{T}(AMB, v)$, devant être un minimum, ce même temps, diminué de celui employé à parcourir le parallèle anB avec la vitesse v_1, sera encore un minimum,

$$\mathfrak{T}.(AMB,\ v) - \mathfrak{T}.(anB,\ v_1) = \text{minimum}.$$

D'ailleurs, si, par une suite de méridiens successifs, on décompose, en un même nombre d'éléments successifs MM′ et nn', la trajectoire AMB et le parallèle anB; la différence précédente sera rendue minimum, si l'on rend minimum chacune des différences élémentaires,

$$\mathfrak{T}.(MM',\ v) - \mathfrak{T}.(nn',\ v_1) = \frac{MM'}{v} - \frac{nn'}{v_1} = \frac{MM'}{v} - \frac{mM'}{v_1 \cdot \frac{r}{r_1}};$$

mM' étant la portion du parallèle du point M' correspondant à la portion nn' du parallèle anB; et r, r_1 désignant les rayons des parallèles des points M' et B, de sorte que l'on a

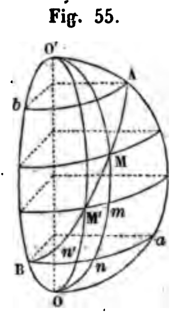


Fig. 55.

$$nn' = mM' . \frac{r_1}{r}.$$

Enfin, $v_1 . \frac{r}{r_1}$ désignant une nouvelle vitesse, la différence précédente revient à celle-ci,

$$\mathfrak{T}.(MM', v) - \mathfrak{T}.\left(mM', v_1 . \frac{r}{r_1}\right),$$

qui sera minimum, d'après le lemme de la page 119, si l'on a

$$(x) \qquad \sin V = \frac{v}{v_1 . \frac{r}{r_1}} = \frac{v}{r} . \frac{r_1}{v_1};$$

ou

$$(X) \qquad \frac{r \sin V}{v} = \frac{r_1}{v_1} = \text{constante} :$$

équation qui définit la courbe cherchée AMB, et dans laquelle V désigne l'inclinaison de la courbe sur le méridien.

3). Réciproquement, si l'on compare maintenant *le temps par* AMM'B avec *le temps par toute autre courbe* $AM_1M'_1B$, on verra que le premier est moindre que le second. Car, prenant pour éléments correspondants des deux courbes les arcs MM', $M_1M'_1$ compris entre les mêmes parallèles; remarquant qu'ils sont parcourus l'un et l'autre avec la même vitesse v_1, et que les triangles rectangles MmM', $M_1m_1M'_1$ sont partiellement superposables; on aura d'abord, suivant le lemme, et d'après la condition (x) à laquelle satisfait l'élément MM',

$$\mathfrak{T}.(MM', v) - \mathfrak{T}.\left(mM', v_1 . \frac{r}{r_1}\right) < \mathfrak{T}(M_1M'_1, v) - \mathfrak{T}.\left(m_1M'_1, v_1 . \frac{r}{r_1}\right),$$

ou

$$\mathfrak{T}.(MM', v) - \mathfrak{T}.(nn', v_1) < \mathfrak{T}.(M_1M'_1, v) - \mathfrak{T}.(n_1n'_1, v_1).$$

De là, en faisant la somme des inégalités semblables, et remarquant que

$$\sum \mathfrak{C}(nn', v_1) = \sum \mathfrak{C}(n_1 n'_1, v_1) = \frac{\text{arc } \widehat{anB}}{v_1},$$

il vient simplement

$$\mathfrak{C}.(\text{AMB}, v) < \mathfrak{C}.(\text{AM}_1\text{B}, v). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

136. *Remarque I.* L'équation précédente $\frac{r \sin V}{v} = \text{constante}$ ne diffère que par la forme de celle donnée par M. Roger (*Journal de Mathématiques*, tome XIII, 1848, page 49),

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{A}.v^2,$$

pour le cas ordinaire de la pesanteur.

Dans le cas de la sphère, et en posant $r = \sin \rho$, l'équation peut s'écrire

$$(\text{X}_1) \qquad v = \text{C}.\sin \rho \sin \text{V} = \text{C}.\sin p.$$

On en déduit cette généralisation d'un théorème d'Euler : *La vitesse, en chaque point d'une brachistochrone sphérique, est directement proportionnelle au sinus de la distance sphérique du* centre des forces O *de la sphère à l'arc de grand cercle tangent à la courbe au point considéré.*

Remarque II. On déduit, de l'équation (X_1),

$$(1) \qquad dv = \text{C}d.\sin p.$$

On a d'ailleurs, *dans le cas ordinaire de la pesanteur*,

$$d.v^2 \quad \text{ou} \quad 2v.dv = 2g \sin \rho \cos \text{V}.ds,$$

ou

$$(2) \qquad v.dv = -g \sin p.d\rho.$$

De là, en divisant (2) par (1), membre à membre, et remplaçant dans l'équation résultante $\frac{\sin \rho . d\rho}{d . \sin p}$ par le rayon de cour-

bure géodésique $r_g = \frac{ds}{e_g}$ de la trajectoire, il vient

$$(X_2) \qquad v = \frac{g}{C} \cdot r_g = k \cdot r_g,$$

k désignant une constante. Or, si l'on remplace dans cette formule v par $\frac{ds}{dt}$ et r_g par $\frac{ds}{e_g}$, e_g désignant l'angle de contingence géodésique de la trajectoire, il vient, en simplifiant,

$$(x_2) \qquad \frac{e_g}{dt} = k;$$

et l'on en déduit

$$(x'_2) \qquad \frac{\int e_g}{T} = k = \text{constante};$$

c'est-à-dire que *le temps* T, *employé par le mobile à parcourir un arc partiel quelconque* A'B' *de la brachistochrone sphérique, est proportionnel à la valeur de l'intégrale* $\int e_g$, *ou* $\int \frac{ds}{r_g}$, *prise de l'origine à l'extrémité de l'arc* A'B'. Mais on trouve aisément que cette intégrale représente l'aire sphérique, comprise entre l'arc A'B' et les tangentes sphériques menées par ses extrémités, augmentée de l'angle extérieur formé par ces mêmes tangentes : donc, *dans le mouvement général sur une brachistochrone sphérique* AMB *d'un point soumis à la pesanteur, le temps, employé par le mobile à parcourir un arc partiel quelconque* A'B' *de sa trajectoire, est proportionnel à l'aire sphérique, comprise entre cet arc et les tangentes sphériques menées par ses extrémités, augmentée de l'angle extérieur de ces mêmes tangentes; ou, encore, proportionnel à l'arc correspondant* a'b' *de la courbe supplémentaire.*

Remarque III. Quant à la nature de la brachistochrone, la comparaison des formules (X_1) et (X_2) fournit cette relation,

$$\frac{r_g}{\sin p} = \text{constante}, \quad \text{ou} \quad \frac{r_g}{\cos i} = \text{constante};$$

i désignant l'angle sous lequel le grand cercle tangent à la brachistochrone sphérique coupe l'équateur, ou le cercle polaire du centre des forces O; et l'on sait que, dans le plan, le rayon de courbure de la cycloïde est pareillement proportionnel au cosinus de l'angle que fait la tangente avec la base de la courbe.

Remarque IV. L'énoncé précédent se simplifie, quand on suppose que le rayon de la sphère augmente indéfiniment; et l'on en déduit ces propriétés nouvelles des brachistochrones planes, que l'on peut d'ailleurs établir directement de la même manière :

1. *Si l'on circonscrit à une demi-cycloïde* AMB *une portion de ligne polygonale* régulière, c'est-à-dire à angles égaux, *dont les tangentes en* A *et* B *formeront les côtés extrêmes; les points de contact des côtés successifs de ce polygone partageront la demi-cycloïde en une suite d'arcs isochrones*, c'est-à-dire en une suite d'arcs partiels qui seront parcourus en des temps égaux, dans le mouvement général du mobile de A en B.

2. *La même propriété s'applique à la brachistochrone relative à un centre* O, *situé à une distance finie, et attirant proportionnellement à la distance.*

3. *Enfin, cette propriété subsiste encore pour la portion de ligne polygonale régulière circonscrite à un arc partiel quelconque* A′B′ *de la brachistochrone; les côtés extrêmes de cette ligne étant toujours formés par les tangentes aux extrémités de l'arc considéré* A′B′, *et le mouvement suivant* A′B′ *faisant toujours partie du mouvement général suivant la ligne totale* AMB.

Remarque V. Si l'on considère, au lieu d'une sphère, une surface de révolution quelconque, le temps employé par le mobile à parcourir un arc déterminé de la brachistochrone n'est plus susceptible, en général, d'une représentation géométrique simple. Si l'on différentie en effet la formule (X), $v = C.r\sin V$, on a d'abord

$$(1) \qquad dv = C.d(r\sin V);$$

on trouve ensuite, G désignant la pesanteur parallèle à l'axe de la surface, et i désignant l'inclinaison, sur l'axe, de la normale à la section méridienne,

$$d.v^2 = 2G \sin i . \cos V . ds,$$

ou

$$(2) \qquad v.dv = G \sin i . \cos V . ds;$$

d'où, par la division, membre à membre, des relations (2) et (1),

$$v = \frac{G}{C} \sin i \cdot \frac{\cos V . ds}{d(r \sin V)}.$$

On a d'ailleurs, pour l'angle de contingence géodésique e_g de la trajectoire (*voir* page 122, formule 33 *bis*),

$$e_g = \frac{d(r \sin V)}{r \cos V}, \quad \frac{\cos V}{d(r \sin V)} = \frac{1}{r . e_g};$$

et il vient, par la substitution de cette valeur dans la formule précédente,

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{G}{C} \cdot \frac{\sin i}{r} \cdot \frac{ds}{e_g},$$

d'où

$$(\text{X}') \qquad \frac{e_g}{dt} = \frac{1}{C} \cdot \frac{G \sin i}{r} = \frac{1}{C} \cdot \frac{G}{n}:$$

n désignant la longueur de la normale à la section méridienne terminée à l'axe de la surface.

Il résulte de cette formule que la sphère (n = constante) est la seule surface de révolution pour laquelle le rapport $\frac{e_g}{dt}$ demeure constant, dans le cas d'une pesanteur constante ($G = g$); et que ce rapport ne peut être constant, pour une surface de révolution quelconque, que dans le cas où la pesanteur serait définie en chaque point par la formule

$$\frac{G}{n} = \text{constante}.$$

CHAPITRE XI.

DES LIGNES A DOUBLE COURBURE CONSIDÉRÉES COMME FIGURES D'ÉQUILIBRE D'UN FIL QUI REPOSE SUR UNE SURFACE.

Parmi les problèmes dont la solution était réservée à l'analyse moderne, et en exceptant les grandes questions de la mécanique céleste, il en est peu qui aient été remaniés aussi souvent que celui dont l'objet est de déterminer la figure d'équilibre d'un fil, dont les extrémités sont fixes, et dont les éléments successifs sont sollicités par des forces qui demeurent constantes, ou qui varient suivant une loi donnée. Sans parler en effet de l'illustre promoteur de ce problème, on voit figurer dans son histoire les noms des plus grands géomètres du dernier siècle et de la fin du précédent : les Bernoulli, Leibnitz et Huygens, Euler, Clairaut et Lagrange. On lit même dans la notice sur Ampère (Arago, *OEuvres*, tome II, page 47) que ce géomètre, s'occupant à son tour de la question, avait su découvrir des lacunes dans un sujet pourtant si exploré.

On doit ajouter cependant que les solutions de ce problème, si nombreuses quand on suppose le fil *libre* et la figure d'équilibre *plane*, deviennent beaucoup plus rares quand il s'agit d'un fil reposant sur une surface ; car, en exceptant le problème devenu classique de la chaînette cylindrique, on possède seulement pour ce cas des formules, très-générales sans doute, mais dont l'application à telle surface particulière que l'on voudrait envisager exigerait peut-être, pour l'interprétation géométrique des résultats obtenus, plus d'efforts que l'étude directe et géométrique du problème.

C'est cette étude directe que nous avons abordée, et dont nous avons essayé de poser les véritables bases. Nous croyons les avoir rencontrées dans deux théorèmes.

Le premier est analogue à celui d'Huygens sur le mouvement curviligne d'un point matériel, et donne, pour les composantes tangentielle et normale de la force totale qui sollicite le fil en chaque point, ces deux expressions,

$$\frac{-dT}{ds} \quad \text{et} \quad \frac{T}{r};$$

T, *ds* et *r* désignant la tension, l'arc élémentaire et le rayon de courbure du fil : résultats qui ont sans doute été rencontrés déjà.

Le second, que nous avons déduit du premier, nous paraît absolument nouveau. Il fournit :

1°. La tension du fil, par une intégrale dont les éléments dépendent seulement de la direction *relative* de la force extérieure et de la figure d'équilibre du fil;

2°. Cette intégration étant effectuée, l'expression du rayon de courbure géodésique du fil;

3°. L'expression entièrement géométrique de la pression exercée par le fil sur chaque point de la surface, à savoir

$$N = \frac{T}{R} - G\cos\gamma;$$

$G\cos\gamma$ et R désignant la composante normale à la surface de la force extérieure, et le rayon de courbure de la ligne géodésique tangente au fil au point considéré. C'est par l'exposition de ces deux théorèmes généraux que nous allons commencer.

§ I.

Principes généraux relatifs aux courbes funiculaires reposant sur une surface quelconque.

137. Théorème I. *Dans toute courbe funiculaire, plane ou à double courbure, mais* entièrement libre *dans l'espace (abstraction faite de ses extrémités qui sont toujours supposées fixes), les composantes tangentielle et normale de la force* totale P, *rapportée à l'unité de longueur du fil, qui*

agit en chaque point de la courbe, ont pour valeurs respectives

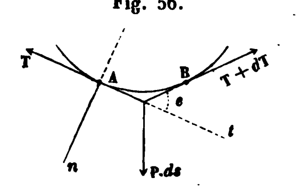
$$\frac{-dT}{ds} \quad \text{et} \quad \frac{T}{r}:$$

T, ds *et* r *désignant la tension, l'arc élémentaire et le rayon de courbure du fil; et* dT *désignant la variation, positive ou négative, qu'éprouve cette tension, de l'origine à l'extrémité de l'arc* ds. La première de ces composantes est d'ailleurs positive, ou négative, suivant qu'elle est dirigée de l'origine à l'extrémité de l'arc ds, ou de l'extrémité à l'origine; et la seconde, qui est toujours dirigée suivant le prolongement du rayon de courbure du fil, est regardée comme essentiellement positive.

Démonstration. L'élément $AB = ds$ du fil, considéré isolément et supposé solidifié, doit être en équilibre sous l'action des tensions, de sens opposés, T et $T + dT$, dirigées suivant les tangentes à ses extrémités, et des forces partielles qui agissent en chacun des points de l'arc AB. Or, les deux premières forces, dirigées suivant deux droites dont la distance est un infiniment petit du troisième ordre, peuvent être considérées comme situées dans le même plan et comme ayant dès lors une résultante unique; les forces partielles agissant en chacun des points de l'arc AB auront donc aussi une résultante unique, que nous représenterons comme à l'ordinaire par $P.ds$, et qui fera équilibre aux deux premières forces T et $T + dT$.

Il résulte d'abord de là que la force totale P est dirigée, en chaque point, dans le plan osculateur du fil; ensuite, que la somme algébrique des projections des trois forces, sur la tangente en A *dirigée dans le sens* AB, ou sur le prolongement *extérieur* du rayon de courbure du fil en A, est égale à zéro pour chacune de ces directions.

Fig. 56.



On en déduit, en négligeant les infiniment petits du second

ordre, et en désignant par e l'angle de contingence du fil,

$$-T + (T + dT) + P\ ds.\cos(P, ds) = 0,$$

ou

$$\text{(A)} \qquad P.\cos(P, ds) = -\frac{dT}{ds};$$

$$-(T + dT)\sin e + P.ds.\cos(P, r) = 0,$$

ou

$$\text{(B)} \qquad P\cos(P, r) = \frac{T}{r}.$$

Observation. La dernière de ces relations a lieu entre des grandeurs absolues : quant à la première, et pour donner à dT le signe qui lui convient, il peut être utile de remarquer que *la variation de tension du fil, dans le passage de l'origine à l'extrémité de l'arc* ds, *est égale et de signe contraire au travail élémentaire de la force* P *dans le trajet* fictif *correspondant.*

138. Théorème II. *Une courbe funiculaire étant en équilibre sur une surface donnée, sous l'influence des réactions normales* N *de la surface et des forces extérieures* G, *appliquées en chacun de ses points :* 1° *la composante de la force extérieure* G *suivant l'arc élémentaire* ds *de la courbe est mesurée par le rapport différentiel* $\frac{-dT}{ds}$; 2° *la composante de cette même force suivant celle des normales à la courbe qui est tangente à la surface, a pour expression, en chaque point,* $\frac{T}{r_g}$, r_g *désignant le rayon de courbure géodésique de la courbe funiculaire en ce point;* 3° *enfin, la réaction exercée par la surface sur le fil est mesurée, en chaque point, par la différence algébrique* $\frac{T}{R} - G\cos\gamma$; R *et* $G\cos\gamma$ *désignant le rayon de courbure de la ligne géodésique tangente au fil, et la composante, normale à la surface, de la force extérieure qui agit au point considéré :* la force

extérieure G et la pression N étant rapportées, l'une et l'autre, à l'unité de longueur du fil.

Démonstration. La courbe funiculaire considérée peut être regardée comme entièrement libre dans l'espace et comme soumise, en chacun de ces points, à la force extérieure G et à la réaction normale N de la surface, dont le système, d'après le théorème précédent, est équivalent au système des composantes tangentielle et normale, $\frac{-dT}{ds}$ et $\frac{T}{r}$ de la force totale. Il en résulte que la somme des composantes des forces du premier système, sur une direction quelconque, est pareillement équivalente à la somme des composantes des forces du second système sur la même direction.

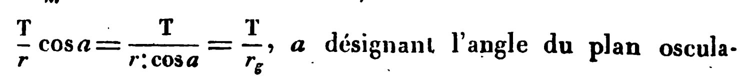
Cela posé, si l'on prend successivement, pour direction de projection, 1° la tangente à la courbe funiculaire; 2° celle des normales à cette courbe qui est située dans le plan tangent à la surface, A*nt*; 3° la normale *intérieure* à la surface, AN; on verra :

Dans le premier cas, que la somme des composantes des forces du premier système se réduisant à la composante $G \sin\gamma . \cos V$ de la force extérieure, et la somme analogue pour le second système à la composante $\frac{-dT}{ds}$, on a

$$(1) \qquad G \sin\gamma . \cos V = -\frac{dT}{ds};$$

Dans le second cas, que la première somme se réduit encore à la composante de la force G, qui est représentée par $G \sin\gamma . \sin V$, V désignant l'inclinaison, sur la tangente à la courbe funiculaire, de la projection de la force G sur le plan tangent; que la seconde somme se réduit à la projection de la composante $\frac{T}{r}$, projection qui est égale à

Fig. 57.



$\frac{T}{r} \cos a = \frac{T}{r : \cos a} = \frac{T}{r_g}$, a désignant l'angle du plan oscula-

teur de la courbe et du plan tangent à la surface : et que l'on a, par suite,

$$(2)\qquad G\sin\gamma.\sin V = \frac{T}{r_g};$$

Dans le troisième cas enfin, que la première somme est égale à $N + G\cos\gamma$, la seconde se réduisant à

$$\frac{T}{r}\cos(90^\circ - a) = \frac{T}{r}\sin a = \frac{T}{r:\sin a} = \frac{T}{R},$$

d'après le théorème de Meunier ; de sorte que l'on a

$$(3)\qquad N = \frac{T}{R} - G\cos\gamma$$

pour la réaction de la surface sur le fil : cette réaction étant d'ailleurs rapportée à l'unité de longueur du fil.

La lettre γ désignant l'angle, aigu ou obtus, formé par la direction de la force G avec la normale intérieure : pour que la formule (3) subsiste telle que nous l'avons écrite, *il faut que le rayon de courbure* r *du fil fasse un angle aigu avec la normale intérieure, le fil reposant lui-même sur le bord interne de la surface.*

Corollaire. Si l'on désigne par V, comme on l'a déjà dit, l'angle formé par la projection $G\sin\gamma$ de la force extérieure sur le plan tangent, avec la tangente de la courbe funiculaire, et par e_g l'angle de contingence géodésique de cette dernière, on aura ces trois formules générales :

$$(I)\qquad \begin{cases} -\dfrac{dT}{T} = \dfrac{\cos V}{\sin V}.\dfrac{ds}{r_g} = \dfrac{e_g}{\tang V}, \\ T = C.e^{-\int \frac{e_g}{\tang V}}; \end{cases}$$

$$(II)\qquad \begin{cases} \dfrac{T}{r_g} = G\sin\gamma.\sin V, \\ r_g = \dfrac{T}{G\sin\gamma.\sin V}; \end{cases}$$

$$(III)\qquad N = \frac{T}{R} - G\cos\gamma :$$

les deux dernières n'étant autre chose que les formules (2) et (3), et la première résultant de la division membre à membre des formules (1) et (2).

Enfin l'élimination de l'angle γ entre les équations (II) et (III) conduit à cette relation :

$$\text{(IV)} \qquad G^2 = \left(\frac{T}{r_g \sin V}\right)^2 + \left(\frac{T}{R} - N\right)^2.$$

Nous n'insisterons pas sur le rôle général de ces formules qui présentent, comme on voit, la plus grande analogie avec celles qui définissent le mouvement d'un point sur une surface (*voir* page 186) ; et pour lesquelles on peut répéter exactement ce qui a été dit déjà pour les premières.

Observation. Il est essentiel de remarquer que l'intégrale $-\int \frac{e_g}{\tang V}$, qui figure en exposant dans la formule (I), et dans laquelle on regardera e_g *comme essentiellement positif*, et $\tang V$ *comme positive, ou négative, suivant que l'angle* V *sera aigu ou obtus*, a bien reçu le signe qui convient à l'expression de la tension. On déduit en effet, de cette formule,

$$dT = -T \cdot \frac{e_g}{\tang V}.$$

Or T et e_g étant positifs, on voit que la différentielle dT sera positive, ou négative, suivant que l'angle V sera obtus, ou aigu ; et c'est ce qui doit être en effet : puisque, d'après une observation antérieure (*voyez* page 225), dT est mesurée par le travail élémentaire correspondant de la force, changé de signe ; et que, ce travail se réduisant à celui de la composante $G \sin \gamma$ qui fait un angle V avec la direction de l'élément du fil, ce travail changé de signe est positif, ou négatif, suivant que l'angle V est obtus, ou aigu.

§ II.

Des courbes funiculaires dans le plan.

139. Si l'on remplace dans les formules précédentes e_g par e',

r_g par ρ; et si l'on pose $\gamma = \frac{\pi}{2}$, il vient

$$(1) \qquad T = Ce^{-\int \frac{e'}{\tan V}},$$

$$(2) \qquad G\rho \sin V = T,$$

e' étant pris en valeur absolue dans la première formule, et $\tan V$ y recevant le signe qui convient à la nature de l'angle formé par la direction de la force avec la direction de l'élément considéré.

140. *Cas des forces parallèles.* Si l'on remarque que la courbe funiculaire tourne toujours sa convexité vers la région où tendent les forces, on trouvera aisément $e' = dV$ pour la valeur absolue de l'angle de contingence; et l'on en déduira les formules suivantes :

$$(a) \qquad T = \frac{C}{\sin V},$$

$$(b) \qquad G\rho \sin^2 V = C,$$

auxquelles on peut joindre celle-ci :

$$(c) \qquad \rho = -\frac{dy}{\cos V . dV} = -\frac{dy}{d.\sin V}.$$

Applications. 1). Si l'on suppose la *gravité constante*, on trouve immédiatement, ou par une première intégration, les propriétés de la *chaînette* exprimées par les équations

$$\rho \sin^2 V = \text{constante}, \qquad y \sin V = \text{constante}.$$

2). *Si l'on veut supposer le poids de chaque élément proportionnel à la longueur de sa projection horizontale*, on devra poser

$$G.ds = g.dx \quad \text{ou} \quad G = g\frac{dx}{ds} = g \sin V.$$

La formule (b) devient alors

$$\rho = \frac{C'}{\sin^3 V},$$

qui, comparée à la formule générale $\rho = \frac{y''}{\sin^3 V}$, donne immédiatement

$$y'' = \text{constante},$$

équation d'une parabole.

3). Si l'on cherche *quelle doit être la loi des forces parallèles pour que la courbe funiculaire soit une ellipse dont l'un des axes soit vertical*, on devra remplacer, dans la formule (b), ρ par $k.\frac{y^3}{\sin^3 V}$, y désignant l'ordonnée de l'ellipse comptée à partir de son axe horizontal; et l'on aura

$$G = \frac{C'.\sin V}{y^3};$$

si l'ellipse devient un cercle, $\frac{\sin V}{y}$ devient constant, et l'on a simplement

$$G = \frac{C''}{y^2}.$$

Scolie. Si l'on compare la formule (b), que l'on peut écrire

$$(b) \qquad \rho = \frac{C}{G \sin^2 V},$$

à la formule, déduite du théorème d'Huygens,

$$(b') \qquad \rho = \frac{C'^2}{G' \sin^3 V},$$

et fournissant le rayon de courbure de la trajectoire d'un point matériel soumis à l'action d'une force G' de direction constante, on est conduit à une sorte de *loi de dualité* en mécanique, analogue à la loi de dualité en géométrie, et qui peut, par cette analogie même, offrir un certain intérêt.

Que l'on regarde, en effet, une même courbe plane comme étant simultanément la trajectoire d'un point matériel et la courbe d'équilibre d'un fil; les forces qui produisent le mouvement, et celles qui maintiennent l'équilibre, étant d'ailleurs

parallèles à une même droite fixe, et de sens contraires : on aura, en égalant les valeurs (b) et (b') du rayon de courbure de la ligne considérée,

$$G = k.G' \sin V.$$

Il en résulte que *la force* G, *nécessaire pour produire l'équilibre d'un fil suivant une courbe plane donnée, est égale à la force* G' *nécessaire pour entretenir le mouvement d'un point matériel suivant cette même courbe, multipliée, en chaque point, par le sinus de l'inclinaison de la commune direction des forces sur la tangente à la courbe, et par un nombre constant; la vitesse du mobile et la tension du fil en un même point de la courbe étant d'ailleurs dans un rapport constant.*

Comme première application de ce théorème, considérons une parabole ayant son axe vertical; et regardons cette courbe comme la trajectoire d'un point matériel soumis à l'action de la pesanteur, on aura

$$G' = g$$

dans la formule précédente; et la parabole considérée pourra être regardée comme étant la figure d'équilibre d'un fil sollicité en chaque point par une force verticale G, dirigée de bas en haut, et ayant pour expression

$$G = k.g \sin V \quad \text{ou} \quad G = k.g.\frac{dx}{ds};$$

d'où

$$G ds = k' dx.$$

La force agissant sur chaque élément du fil est donc proportionnelle à la projection horizontale de cet élément; et l'on retrouve les résultats connus, relatifs à la *courbe des ponts suspendus*.

Considérons encore, et comme application *inverse* du même théorème, une chaînette ayant son axe vertical; et regardons-la comme la figure d'équilibre d'un fil soumis à l'action de la pesanteur. On aura, dans la même formule,

$$G = \text{constante} = g;$$

et la chaînette considérée pourra être regardée comme la trajectoire d'un point soumis à l'action d'une force verticale G', dirigée de bas en haut, et ayant pour expression

$$G' = \frac{k'}{\sin V}.$$

Mais l'ordonnée de la chaînette, comptée à partir d'un axe horizontal convenablement choisi, est liée à l'angle V par la relation connue $y \sin V =$ constante; on aura donc simplement

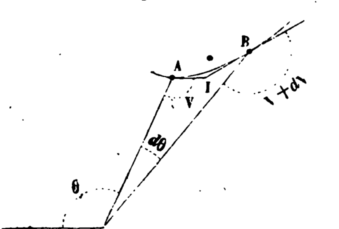
$$G' = k''.y$$

pour expression de la force; et l'on en conclut une autre propriété mécanique de cette courbe, par laquelle *la chaînette est la trajectoire d'un point matériel soumis à l'action d'une force, proportionnelle à la distance du mobile à un axe fixe, et dirigée en sens inverse de la droite qui mesure cette distance.*

141. *Cas des forces concourantes.* La somme des angles intérieurs du quadrilatère concave AIBO étant égale à quatre droits, on a

$$d\theta + V + (2^{dr} + e') + (2^{dr} - V - dV) = 4^{dr} \quad \text{ou} \quad e' = dV - d\theta;$$

Fig. 58.



on a d'ailleurs

$$\tang V = \pm r \frac{d\theta}{dr},$$

que l'on doit écrire

$$\tang V = -r \frac{d\theta}{dr},$$

puisque l'angle V est obtus et que la différentielle dr est positive dans la figure.

Il en résulte

$$d\theta = -\frac{dr}{r} \tang V;$$

et l'on a définitivement pour e',

$$e' = dV + \frac{dr}{r}\operatorname{tang} V.$$

On en déduit

$$\int \frac{e'}{\operatorname{tang} V} = \int \frac{dV}{\operatorname{tang} V} + \int \frac{dr}{r} = \mathrm{L}.r\sin V, \quad e^{-\int \frac{e'}{\operatorname{tang} V}} = \frac{1}{r\sin V},$$

et l'on a par conséquent ces formules :

$$(a') \qquad T = \frac{C}{r\sin V} = \frac{C}{p},$$

$$(b') \qquad G.\rho.r.\sin^2 V = C,$$

auxquelles on peut joindre la formule d'Euler

$$(c') \qquad \rho = -\frac{rdr}{dp}.$$

Applications. 1). On satisfait à l'équation (b') en posant

$$\rho = \text{constante},$$

et

$$(1) \qquad Gr\sin^2 V = \text{constante}.$$

On en déduit que, *la courbe funiculaire étant une circonférence de cercle, la force en chaque point est inversement proportionnelle au produit du rayon vecteur par le carré de la corde que ce rayon prolongé détermine dans la circonférence.*

2). Si l'on veut que *la courbe funiculaire soit une ellipse ayant pour centre le centre des forces,* il faudra poser

$$\rho = \frac{k^2}{p^3} = \frac{k^2}{r^3\sin^3 V}$$

dans la formule (b), qui donnera, pour expression de la force *répulsive* émanant du centre,

$$G = C'.r^2\sin V$$

ou

$$(2) \qquad G = C'p.r.$$

3). On verrait de même que, *la courbe funiculaire étant une ellipse dont l'un des foyers coïnciderait avec le centre des forces, la grandeur de la force répulsive émanant du foyer serait, en chaque point,*

$$(3) \qquad G = C' . \frac{p}{r^2};$$

en remplaçant dans la formule (b') ρ par la valeur $\rho = k\frac{r^3}{p^3}$, qui correspond à l'hypothèse actuelle.

4). Supposons la courbe d'équilibre telle, que l'angle V soit constant : cette courbe sera une *spirale logarithmique,* et l'on aura, d'après la formule (b'),

$$G = \frac{C}{\rho . r . \sin^2 V} = \frac{C'}{\rho . r} = \frac{C''}{r^2},$$

C' et C'' désignant de nouvelles constantes, et la seconde se rapportant à la substitution au rayon de courbure ρ du rayon vecteur r qui lui est proportionnel; on peut l'écrire encore

$$(4) \qquad G = C \frac{p}{r^3}.$$

142. Les formules (2), (3), (4) conduisent par induction à la loi suivante, qui est, en effet, générale : *Une même ligne plane étant à la fois la trajectoire d'un point matériel, et la figure d'équilibre d'un fil, soumis à l'action de forces émanant du même centre; la force agissant sur le fil, en chaque point de cette ligne, est égale au produit de la force qui sollicite le mobile, parvenu au même point, par la distance du centre commun des forces à la tangente en ce point, et par un nombre constant.*

On a, en effet, d'après le théorème d'Huygens,

$$\frac{v^2}{\rho} = G' \sin V;$$

et d'après un théorème de Newton,

$$v = \frac{C'}{p},$$

ν désignant la vitesse du mobile en un point quelconque de sa trajectoire, et G' la grandeur de la force centrale qui le sollicite en ce point. On en déduit

$$(d') \qquad G' = \frac{C'^2}{\rho \cdot p^2 \cdot \sin V}.$$

On tire d'ailleurs, de la formule (b'),

$$G = \frac{C}{\rho \cdot r \sin^2 V}$$

ou

$$(d) \qquad G = \frac{C}{\rho \cdot p \cdot \sin V} = \frac{C}{\rho \cdot p^2 \cdot \sin V} \cdot p;$$

d'où, en comparant (d) et (d'),

$$(5) \qquad G = G' \cdot C'' \cdot p.$$

Et l'on doit remarquer, en outre, que *les forces* G *étant attractives, les forces* G' *seront répulsives; et réciproquement.*

143. *Scolie.* Les formules générales (1) et (2) (*voir* p. 229) peuvent encore s'appliquer avec avantage au cas où les forces sollicitant les divers éléments du fil ne sont ni parallèles, ni concourantes.

Ainsi, proposons-nous de déterminer *la figure d'équilibre d'un fil dont chaque élément serait sollicité par une force dont la grandeur, et l'inclinaison sur cet élément, demeureraient constantes* (O. Bonnet, *Journal de Mathématiques*, tome IX, page 225).

Les formules (1) et (2), dans lesquelles nous remplacerons $\frac{-1}{\operatorname{tang} V}$ par m, et $\frac{C}{G \sin V}$ par C', nous donneront

$$T = C\, e^{m \int \varepsilon'}, \quad \rho = C'' \cdot T = C' \cdot e^{m \int \varepsilon'}.$$

On en déduit

$$d\rho = m \cdot \rho \varepsilon' = m \cdot ds,$$

ou

$$(6) \qquad d\sigma = m \cdot ds.$$

Cette égalité exprime la proportionnalité des arcs élémentaires *correspondants* de la courbe funiculaire cherchée et de sa développée : ces deux courbes sont semblables ; et la courbe cherchée est une spirale logarithmique (*voir* page 39).

§ III.

Des courbes funiculaires sur un cylindre quelconque.

144. Si l'on suppose la projection de la force extérieure sur le plan tangent dirigée, en chaque point, suivant la génératrice correspondante du cylindre, V désignera, dans les formules générales (I), (II), (III) de la page 227, l'inclinaison de la courbe funiculaire sur cette génératrice.

On a d'ailleurs, pour l'angle de contingence et le rayon de courbure géodésique de la courbe funiculaire, ces valeurs :

$$e_g = e', \quad r_g = \rho' ;$$

e' et ρ' désignant l'angle de contingence et le rayon de courbure *correspondants* de la ligne plane suivant laquelle se transforme la courbe funiculaire considérée, par le développement du cylindre qui la contient : et les formules (I) et (II) deviennent, par ces substitutions,

$$T = C.e^{-\int \frac{e'}{\tan V}}, \quad G \sin \gamma . \rho' \sin V = T.$$

Or, ces équations sont identiques à celles qui définiraient la loi de la tension et la nature d'une courbe funiculaire plane dont chaque élément serait sollicité par une force, parallèle à la direction des génératrices du cylindre développé, et mesurée en chaque point par le nombre $G \sin \gamma$ (*voir* page 229) ; et il résulte de là, en premier lieu, ce théorème général :

Une courbe funiculaire étant en équilibre sur un cylindre quelconque, sous l'influence des réactions normales de la surface et de certaines forces extérieures dont les projections sur le plan tangent sont dirigées, en chaque point, suivant la

génératrice du cylindre ; si l'on suppose développés sur un plan le cylindre et la courbe funiculaire qu'il contient, et si l'on conçoit en outre que les forces extérieures primitives, estimées suivant les génératrices du cylindre, conservent dans ce développement leur direction et leur intensité : la courbe funiculaire transformée demeurera encore en équilibre sous l'influence de ces forces, et la tension sera la même, aux mêmes points, sur la courbe primitive et sur la courbe transformée.

En second lieu, et en transportant au cylindre les formules (a) et (b) relatives au plan (*voir* page 229), on aura

$$(1) \qquad T = \frac{C}{\sin V},$$

$$(2) \qquad G \sin\gamma \,.\, r_g \sin^2 V = C.$$

Quant à la réaction, $N = \frac{T}{R} - G\cos\gamma = \frac{C}{R\sin V} - G\cos\gamma$, il suffit pour obtenir son expression définitive de remplacer R par la valeur $\frac{\rho}{\sin^2 V}$, ρ désignant le rayon de courbure de la section droite du cylindre au point considéré. On trouve ainsi :

$$(3) \qquad N = \frac{C}{\rho}\sin V - G\cos\gamma = \frac{C^2}{\rho . T} - G\cos\gamma.$$

145. Il résulte du théorème précédent que tout ce que l'on sait, pour le plan, sur les figures d'équilibre d'un fil soumis à des forces de direction constante, peut être transporté au cylindre. Ainsi, en particulier, *si l'on suppose l'angle* $\gamma = \frac{\pi}{2}$ *et la gravité constante,* on retrouve d'abord ce résultat connu : *la courbe tracée par le fil sur le cylindre a pour transformée une* chaînette, *dans le développement de la surface* (Vieille, *Compléments d'Analyse et de Mécanique*, page 202). On reconnaît ensuite, par l'emploi de la formule (3), que *la tension de la courbe, la pression qu'elle exerce sur la surface, et le rayon de courbure de la section droite du cylindre sont, en chaque point, les facteurs d'un produit constant :* d'où

cette conséquence, que *la pression est en raison inverse de la tension correspondante, quand le cylindre est de révolution* (Vieille, ouvrage cité, p. 203).

On a, d'un autre côté, pour le rayon de première courbure R_1 d'une ligne cylindrique quelconque, et en désignant par a l'inclinaison de son plan osculateur sur le plan tangent au cylindre,

$$R_1 = \frac{\rho \sin a}{\sin^2 V}:$$

d'où

$$r_g = \frac{R_1}{\cos a} = \frac{\rho \operatorname{tang} a}{\sin^2 V};$$

ou enfin

$$r_g \sin^2 V = \rho . \operatorname{tang} a,$$

dont la comparaison avec la formule (2) qui devient, dans le cas actuel,

$$r_g \sin^2 V = \text{constante},$$

conduit à la relation

$$(4) \qquad \rho . \operatorname{tang} a = \text{constante}.$$

Donc, *en chaque point d'une chaînette cylindrique, le rayon de courbure de la section droite, multiplié par la tangente trigonométrique de l'inclinaison du plan osculateur de la chaîne sur le plan tangent à la surface, donne un produit constant*. Et, en particulier, *si le cylindre est de révolution, le plan osculateur de la chaîne fait avec le plan tangent un angle constant*. On reconnaît aisément d'ailleurs que toute courbe cylindrique présentant cette propriété est une chaînette.

146. Pour que la pression exercée par le fil sur la surface soit constante, quand on suppose le cylindre de révolution, et les forces extérieures dirigées suivant les génératrices, il faut, d'après la double formule $N = \frac{C}{\rho} \sin V = \frac{C^2}{\rho . T}$, que l'angle V demeure constant, ainsi que la tension : il en résulte que les

forces extérieures sont nulles, et que la courbe funiculaire est une hélice.

§ IV.

Des courbes funiculaires sur un cône quelconque.

147. Supposant encore la projection de la force extérieure sur le plan tangent dirigée en chaque point suivant la génératrice correspondante du cône, nous pouvons, en répétant exactement ce qui a été déjà dit pour le cylindre, remplacer dans les formules (I) et (II) de la page 227, l'angle de contingence et le rayon de courbure géodésique de la courbe funiculaire conique considérée, par les grandeurs analogues relatives à la courbe plane, suivant laquelle elle se transforme par le développement du cône. Nous obtiendrons ainsi les formules

$$T = C.e^{-\int \frac{e'}{\operatorname{tang} V}} \quad \text{et} \quad (G \sin \gamma)\rho . \sin V = T,$$

V désignant cette fois l'inclinaison, sur la courbe funiculaire développée, du rayon vecteur issu du sommet du cône. Or ces formules, en ayant égard à la nouvelle signification de l'angle V, sont précisément celles qui définiraient la loi de la tension et la nature de la courbe d'équilibre d'un fil plan dont chaque élément serait sollicité par une force, émanant d'un centre fixe (le sommet du cône développé), et mesurée par $G \sin \gamma$ (*voir* les formules (1) et (2), page 229). On a donc ce second théorème : *Une courbe funiculaire étant en équilibre sur un cône, sous l'influence des réactions normales de la surface et de certaines forces extérieures dont les projections sur le plan tangent, en chaque point, sont dirigées suivant la génératrice du cône; si l'on suppose développés sur un plan le cône et la courbe funiculaire qu'il contient, et si l'on conçoit en outre que les forces extérieures primitives, estimées suivant les génératrices du cône, conservent dans ce développement leur intensité et leur direction, de manière à concourir toujours au sommet du cône développé : la courbe*

funiculaire transformée demeurera encore en équilibre sous l'influence de ces forces; et la tension sera la même, aux mêmes points, sur la courbe primitive et sur la courbe transformée.

En second lieu, et en transportant au cône les formules (a') et (b') (*voir* page 233), relatives au cas des forces concourantes dans le plan, on aura

$$(1') \qquad T = \frac{C}{r \sin V}, \qquad (2') \quad G \sin\gamma . r_g . r \sin^2 V = C,$$

r désignant la distance d'un point quelconque de la courbe au sommet du cône.

Quant à la pression, $N = \frac{T}{R} - G\cos\gamma = \frac{C}{R . r \sin V} - G\cos\gamma$, il suffit, pour obtenir sa valeur définitive, de remplacer R par sa valeur :

$$R = \frac{r \operatorname{tang} A}{\sin^2 V} \quad (\textit{voir page } 135),$$

A désignant le demi-angle au sommet du cône droit, osculateur du proposé, le long de la génératrice considérée. On trouve ainsi

$$(3') \qquad N = C \cdot \frac{\sin V}{r^2 \operatorname{tang} A} - G\cos\gamma.$$

148. *Applications.* 1). *Quelle doit être la loi des forces pour que la pression du fil sur la surface demeure constante, en supposant le cône de révolution, et les forces extérieures dirigées suivant les génératrices?*

La formule (3′) nous donne, dans ce cas,

$$(a) \quad \frac{\sin V}{r^2} = \text{constante}, \qquad \text{ou} \qquad (a') \quad \frac{p}{r^3} = \text{constante};$$

en développant le cône sur un plan et désignant par p la perpendiculaire abaissée du *sommet-origine* sur la tangente à la courbe funiculaire transformée. On a, d'ailleurs,

$$r_g = \rho = \frac{rdr}{dp}, \qquad \text{ou} \qquad r_g = \frac{C'}{r},$$

en utilisant la formule (a'). Et si l'on porte cette valeur dans l'équation ($2'$), il vient $G = \frac{C}{C'} \cdot \frac{1}{\sin^2 V}$; ou, d'après la formule (a),

$$(x) \qquad G = \frac{C''}{r^4}$$

pour expression de la force cherchée. On a pu voir d'ailleurs que *la courbure, en chaque point de la courbure funiculaire transformée, est proportionnelle au rayon vecteur de ce point.*

2). Conservant l'hypothèse précédente sur la direction des forces et sur la nature du cône, cherchons encore *quelle doit être la loi des forces pour que le plan osculateur du fil coupe le cône sous un angle constant.*

Il suffit, pour résoudre cette question, de recourir à la formule

$$R_1 = \sin a \cdot \frac{r \tang A}{\sin^2 V}$$

qui fournit le rayon de première courbure R_1 d'une ligne quelconque tracée sur le cône, et dont le plan osculateur coupe la surface sous l'angle a. On en déduit, en effet,

$$r_g = \frac{R_1}{\cos a} = \tang a \cdot \frac{r \tang A}{\sin^2 V},$$

dont la comparaison avec la formule ($2'$),

$$r_g = \frac{1}{G.r} \cdot \frac{C}{\sin^2 V},$$

conduit à la loi cherchée

$$(y) \qquad G = \frac{C'}{r^2}.$$

Les hélices coniques seront d'ailleurs comprises dans les courbes funiculaires répondant à la question.

3). *De la chaînette sur un cône de révolution dont l'axe est vertical, dans le cas ordinaire de la pesanteur.* Regardant $G \sin \gamma$ comme une constante dans la formule ($2'$), rem-

plaçant r_g par $-\frac{rdr}{dp}$ et $\sin V$ par $\frac{p}{r}$, on trouve successivement ces équations de la chaînette *transformée* :

$$-dr = \frac{C dp}{p^2}, \qquad (z) \quad p(r + C') = C.$$

Si l'on remplace dans cette dernière p par $r \sin V$, et $\sin V$ par $\sqrt{1 - \left(\frac{dr}{ds}\right)^2}$, il vient

$$(z') \qquad r(r + C')\sqrt{1 - \left(\frac{dr}{ds}\right)^2} = C$$

pour équation différentielle, entre les coordonnées r et s, de la courbe cherchée.

L'équation (z') rentre dans la formule (33), page 169, que Bobillier déduit, par une première intégration, d'une équation du second ordre entre les mêmes variables (*De la chaînette sur une surface courbe*, *Annales de Gergonne*, 1829, pages 153-175).

Si l'on suppose nulle la constante C', l'équation (z) devient

$$p.r = C, \quad \text{ou} \quad r^2 \sin V = C :$$

et si, pour plus de facilité dans l'intégration, on substitue à la recherche de la courbe celle de sa *réciproque*,

$$\frac{\sin V}{r^2} = C,$$

on constate aisément que cette dernière est une lemniscate de Bernoulli ; la courbe primitive étant dès lors une *hyperbole équilatère*.

149. La transformation des courbes funiculaires reposant sur une surface développable quelconque en des courbes funiculaires planes, par le développement de la surface, peut être établie, d'une manière générale, par des considérations entièrement semblables à celles que nous avons déjà employées pour les surfaces coniques et cylindriques. (*Voir* aussi le chapitre précédent, n° 119, page 194.)

§ V.

Des courbes funiculaires sphériques.

150. Si l'on suppose la force extérieure dirigée, en chaque point du fil, dans le plan déterminé par ce point et par un diamètre fixe AA′ de la sphère, qui pourra être regardé comme vertical; la composante $G \sin \gamma$ de cette force suivant le plan tangent sera dirigée suivant la tangente à l'arc de grand cercle Am qui joint le pôle A au point m du fil, et V désignera, dans les formules générales de la page 227, l'inclinaison de l'arc Am sur la courbe funiculaire.

D'ailleurs, le rayon de courbure géodésique de la courbe funiculaire sera donné par la formule

$$r_g = \frac{ds}{e_g} = -\frac{\sin\rho \,.\, d\rho}{d.\sin p},$$

en se conformant à l'observation de la page 43, et en admettant qu'en chaque point de la courbe funiculaire la courbe elle-même et le *centre des forces* A sont situés de part et d'autre du grand cercle tangent à la courbe en ce point.

On déduit, de la formule précédente,

$$e_g = -\frac{ds}{d\rho}\cdot\frac{d.\sin p}{\sin\rho}.$$

D'ailleurs on a toujours, en grandeur et en signe,

$$\frac{ds}{dp} = -\frac{1}{\cos V}.$$

Il en résulte

$$e_g = \frac{1}{\cos V}\cdot\frac{d.\sin p}{\sin\rho}, \qquad \frac{e_g}{\operatorname{tang} V} = \frac{d.\sin p}{\sin V \sin\rho} = \frac{d.\sin p}{\sin p},$$

$$-\int \frac{e_g}{\operatorname{tang} V} = -\mathrm{L}.\sin p;$$

et la substitution de cette dernière valeur, dans la formule (I)

de la page 227, nous donne d'abord

$$(\text{I}') \qquad T = \frac{C}{\sin p}.$$

Si l'on introduit ensuite cette valeur de la tension dans les formules (II) et (III) de la même page, elles deviennent

$$(\text{II}') \qquad G \sin\gamma \,.\, r_g \,.\, \sin p \sin V = C,$$

$$(\text{III}') \qquad N = T - G\cos\gamma = \frac{C}{\sin p} - G\cos\gamma :$$

le rayon de la sphère étant pris pour unité. Ces formules sont, pour la sphère, ce que sont pour le plan les formules (a') et (b') de la page 233, relatives aux courbes funiculaires sollicitées par des forces *concourantes*.

151. Etant donnée l'équation de la courbe funiculaire $f(\rho, \psi) = 0$, on trouve aisément pour la tension du fil, et pour la composante tangentielle R de la force extérieure, composante dirigée en chaque point suivant la tangente au grand cercle qui aboutit au pôle, ou centre des forces A, les expressions suivantes :

$$(\text{IV}) \qquad T = C\sqrt{\frac{1}{\sin^2\rho} + \left(\frac{d\dfrac{1}{\tang\rho}}{d\psi}\right)^2},$$

$$(\text{V}) \qquad R = \frac{\dfrac{C^2}{\sin^2\rho}\left(\dfrac{1}{\tang\rho} + \dfrac{d^2\dfrac{1}{\tang\rho}}{d\psi^2}\right)}{2T}.$$

La première, en effet, n'est autre chose que la traduction, sous forme différentielle, de l'équation (I'), $T = \frac{C}{\sin p}$; et la dernière résulte de la formule

$$dT = -R\cos V \,.\, ds = R \,.\, d\rho, \quad \text{ou} \quad R = \frac{dT}{d\rho}.$$

152. Si l'on suppose les forces extérieures parallèles à la direction du diamètre vertical A'A, on devra remplacer γ par

$\pi - \rho$ dans les formules précédentes, et l'on aura

$$(\text{I}'') \qquad T = \frac{C}{\sin p},$$

$$(\text{II}'') \qquad G . r_g . \sin^2 p = C,$$

$$(\text{III}'') \qquad N = \frac{C}{\sin p} + G \cos \rho.$$

153. On déduirait aisément, de ces formules, soit la loi des forces parallèles capables de produire l'équilibre d'un fil suivant une courbe sphérique de nature donnée, telle qu'un petit cercle horizontal ou quelconque, une loxodromie, etc.; soit l'équation différentielle de la courbe d'équilibre d'un fil sollicité par des forces parallèles données. La marche à suivre est identique à celle que nous avons employée dans l'étude du mouvement sphérique d'un point matériel; elle conduit à des résultats analogues, et, pour cette raison, nous nous dispenserons de l'indiquer davantage.

Cherchons cependant, afin de donner au moins une application de nos formules, l'équation de la *chaînette sphérique dans le cas ordinaire de la pesanteur*. L'équation (II''), dans laquelle, en faisant abstraction de la constante $G = g$, on remplacera r_g par $-\frac{\sin \rho . d\rho}{d . \sin p}$, nous donnera successivement,

$$-\sin \rho . d\rho = C \frac{d . \sin p}{\sin^2 p},$$

$$\cos \rho + C' = -\frac{C}{\sin p},$$

ou

$$(x) \qquad \sin p (\cos \rho + C') = \sin V \sin \rho (\cos \rho + C') = -C.$$

On a, d'ailleurs,

$$\cos V = \frac{d\rho}{ds},$$

$$\sin V = \sqrt{1 - \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2};$$

ou bien, en posant

$$\cos\rho = z, \quad \text{d'où} \quad \frac{d\rho}{ds} = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\cdot\frac{dz}{ds};$$

$$\sin V = \sqrt{1 - \frac{dz^2}{(1-z^2)\,ds^2}}.$$

Substituant cette valeur dans (x) et résolvant par rapport à ds, il vient

$$(x') \qquad ds = \frac{(z+C')\,dz}{\sqrt{(z+C')^2(1-z^2)-C^2}}$$

pour équation différentielle de la courbe cherchée. Elle ne peut être intégrée que dans le cas particulier où $C' = 0$, et c'est aussi le seul cas examiné par Bobillier dans le Mémoire cité : car il parvient *seulement*, pour le cas général, à l'équation différentielle du second ordre (formule 41, page 273)

$$(z+A)\frac{d^2z}{ds^2} + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 + z(2z+A) = 1;$$

et l'on retrouve aisément cette dernière par la différentiation de l'équation (x') qui en est, par conséquent, l'intégrale.

Nous ajouterons qu'on aurait pu obtenir directement l'équation (x'), sans aucune intégration, en égalant la valeur de la tension qui résulte de notre formule, $T = \frac{C}{\sin p}$, à l'expression ordinaire qui se réduit, dans le cas actuel, à celle-ci :

$$T = z + C' = \cos\rho + C'.$$

154. La comparaison des formules (I') et (II') du paragraphe actuel, aux formules de même nom de la page 197, relatives au mouvement sphérique d'un point matériel :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Équilibre.} & \left\{\begin{array}{l} T = \dfrac{C}{\sin p}, \\ G\sin\gamma \,.\, r_g \,.\, \sin V \,.\, \sin p = C, \end{array}\right. \\ \text{Mouvement.} & \left\{\begin{array}{l} v = \dfrac{C}{\sin p}, \\ G'\sin\gamma \,.\, r_g \, \sin V \,.\, \sin^2 p = C^2, \end{array}\right. \end{array}\right\} \text{d'où } G = G' \,.\, C \,.\, \sin p,$$

conduit à ce résultat général :

La force extérieure, capable de produire l'équilibre d'un fil suivant une courbe sphérique donnée, est égale à la force analogue capable d'entretenir le mouvement d'un mobile suivant la même courbe, multipliée en chaque point par un nombre constant et par le sinus de la distance sphérique du centre des forces A *à l'arc de grand cercle tangent à la courbe en ce point; de plus, la vitesse du mobile et la tension du fil, considérées en un même point de la courbe, sont dans un rapport constant : les forces extérieures, qui produisent le mouvement ou l'équilibre, étant d'ailleurs directement opposées, et rencontrant constamment le diamètre* A'A *de la sphère qui aboutit au* centre des forces.

155. On pourrait parvenir à des conséquences semblables pour une surface de révolution quelconque : mais tous ces résultats partiels ne sont que les expressions particularisées d'un même théorème général, que nous allons exposer, et par lequel nous terminerons.

§ VI.

Des analogies que présentent le mouvement d'un point matériel, et l'équilibre d'un fil, suivant une même courbe donnée.

156. Les analogies dont nous allons nous occuper sont évidemment susceptibles d'une infinité d'interprétations : puisque, une courbe étant donnée, ainsi que les forces qui produisent le mouvement d'un point (ou l'équilibre d'un fil) suivant cette courbe, on pourra faire varier d'une infinité de manières les forces capables de produire l'équilibre d'un fil (ou le mouvement d'un point) suivant la même courbe.

Maclaurin paraît s'en être occupé le premier (*Traité des Fluxions*, t. II, n° 563, 4°; et n°s 566-569); mais il s'exprime sur cette matière avec une concision qui n'est pas sans obscurité, au moins dans la traduction; car nous n'avons pas su distinguer s'il a considéré, en même temps que la courbe d'équilibre

du fil, le mouvement *libre* d'un point matériel sur la même courbe, ou bien le mouvement d'un point *obligé* de parcourir cette courbe regardée comme solidifiée : on reconnaît cependant qu'il suppose *parallèles et de sens contraires* les forces qui produisent le mouvement et celles qui maintiennent l'équilibre; et c'est précisément l'hypothèse que nous adopterons.

Dans un Mémoire déjà cité (*Journal de Mathématiques*, t. IX, p. 232), M. O. Bonnet est parvenu à ce théorème : *Si une courbe plane quelconque est la figure d'équilibre d'une chaîne dont chaque élément est soumis à la force* R, *la même courbe sera la trajectoire d'un mobile sollicité par une force que l'on déduit de* R *en prenant en sens inverse ses composantes tangentielle et normale à la courbe, et doublant la composante normale, ou réduisant à moitié la composante tangentielle*

On peut parvenir à une autre expression, simple et intuitive, de ces analogies, par l'emploi des formules qui ont été établies précédemment (*voir* page 186 et page 227).

157. Concevons, en effet, qu'une courbe tracée sur une surface quelconque représente à la fois la figure d'équilibre d'un fil et la trajectoire d'un point matériel, sollicités en chaque point de la courbe considérée par des forces extérieures *directement opposées,* G et G', dont les directions sont définies par les angles *supplémentaires* V et V', γ et γ'; on aura les équations suivantes (*voir* les pages 227 et 186) :

$$\text{Équilibre.}\quad (1)\ \mathrm{T}=\mathrm{C}.e^{-\int\frac{e_g}{\operatorname{tang}\mathrm{V}}},\quad (2)\ \mathrm{G}\sin\gamma.r_g.\sin\mathrm{V}=\mathrm{T};$$

$$\text{Mouvement.}\quad (1')\ v=\mathrm{C}'.e^{\int\frac{e_g}{\operatorname{tang}\mathrm{V}'}},\quad (2')\ \mathrm{G}'\sin\gamma'.r_g.\sin\mathrm{V}'=v^2.$$

On conclut d'abord, des formules (1) et (1'), et en supposant égales les constantes C et C', que la tension et la vitesse en chaque point de la courbe sont mesurées par un même nombre; car l'angle e_g est pris en valeur absolue dans les deux formules,

tandis que tang V et tang V′ y sont égales et affectées de signes contraires :

$$(A) \qquad v = T.$$

On déduit ensuite, de la comparaison des formules (2) et (2′), la proportion

$$\frac{G}{T} = \frac{G'}{v^2},$$

que l'on peut écrire, d'après la relation (A),

$$(B) \qquad G = \frac{G'}{v},$$

$$(B') \qquad G' = G.T;$$

et il résulte de ces formules ce théorème général :

Une courbe, tracée sur une surface quelconque, étant considérée comme représentant à la fois la trajectoire d'un point matériel et la figure d'équilibre d'un fil, soumis l'un et l'autre aux réactions normales de la surface, et sollicités en outre, en chaque point de la courbe, par des forces extérieures directement opposées :

1°. *Si la vitesse initiale du mobile est égale à la tension correspondante du fil, la même égalité subsistera, en chaque point de la courbe, entre les nombres mesurant la tension du fil et la vitesse du mobile ;*

2°. *En chaque point de la courbe, la force extérieure* G′, *qui entretient le mouvement, sera égale à la force analogue* G, *qui maintient l'équilibre, multipliée par la tension correspondante du fil ;* ou, inversement, *la force maintenant l'équilibre sera égale à la force produisant le mouvement, divisée par la vitesse correspondante du mobile.*

Nous avons déjà vu, comme conséquence particulière de ce théorème général, que *la même courbe qui sert de trajectoire à un point matériel animé d'une vitesse initiale quelconque et soumis à l'action de la pesanteur, représente encore,* après avoir été rabattue dans son propre plan autour d'une corde horizontale, *la figure d'équilibre d'un fil dont chaque élément*

serait sollicité par une force verticale, proportionnelle à la projection horizontale de cet élément. Cette remarque conduit à un rapprochement historique curieux. On sait, en effet, que Galilée, méditant le premier sur la nature de la chaînette, se trompa en croyant voir dans cette courbe une parabole. Et il résulte, de ce qui précède, que la détermination des lois du mouvement des projectiles contenait implicitement la solution du problème de la chaînette; non, il est vrai, dans l'hypothèse d'une gravité constante, mais au moins dans celle qui donne naissance à la courbe des ponts suspendus.

NOTES.

NOTE I.

SUR LA SURFACE GAUCHE DONT LES LIGNES DE PREMIÈRE COURBURE SONT SITUÉES DANS DES PLANS PARALLÈLES.

Toute surface gauche dont les lignes de première courbure sont planes, et situées dans des plans parallèles, est un hyperboloïde de révolution (voir page 165).

Lemme I. *Pour une même génératrice* OG *d'une surface gauche quelconque* S, *les pôles sphériques des tangentes, menées aux lignes asymptotiques de la surface par les points de ces lignes situés sur la génératrice* OG, *sont situés sur une conique sphérique* $\gamma\gamma_1 g$, *tangente à la trace sphérique* gg' *du cône directeur de la surface, au point* g *de cette trace qui est le pôle de la génératrice considérée* OG.

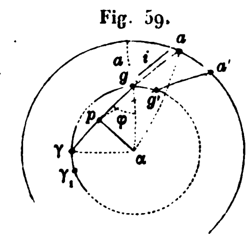
Considérons, en effet, l'hyperboloïde *variable* déterminé par la génératrice fixe OG et par deux autres génératrices O'G', O''G'' de la surface S, infiniment voisines de la première ; et soit H l'hyperboloïde *limite* du précédent, ou l'*hyperboloïde osculateur* de la surface S suivant la génératrice OG : les traces sphériques gg', $\gamma\gamma_1 g$ des cônes directeurs des deux surfaces S et H seront tangentes entre elles au point commun g. D'ailleurs les deux surfaces S et H étant osculatrices tout le long de la génératrice OG, les lignes asymptotiques des deux surfaces en un même point de cette génératrice sont tangentes entre elles ; or, les lignes asymptotiques de l'hyperboloïde sont toutes les génératrices rectilignes du second système, dont les

pôles sphériques sont distribués sur l'ellipse sphérique $\gamma\gamma_1 g$, tangente à la ligne gg' en g; donc, etc.

Lemme II. *En chaque point d'une surface gauche, la génératrice rectiligne et la tangente de la ligne asymptotique qui passent par ce point, forment deux angles adjacents dont les bissectrices sont les tangentes conjuguées rectangulaires issues du même point.*

Ces lemmes posés, soient aa' le grand cercle, de pôle α, qui sert d'indicatrice à toutes les lignes de première courbure, et en particulier à la ligne AA'; ag, $a'g'$ les arcs de grand cercle parallèles aux plans tangents de la surface S en A, A', et coupant le grand cercle aa' sous un angle qui demeure constant, d'après le théorème de M. Joachimstal. Le point p, où l'arc ag touche son enveloppe (*voir* page 50), est le pied de la perpendiculaire sphérique abaissée du point α sur l'arc ag; les points p et a sont les pôles sphériques des tangentes conjuguées rectangulaires relatives au point A; et si l'on prend sur agp l'arc $p\gamma$, égal à l'arc pg, le point γ sera le pôle sphérique de la tangente à la ligne asymptotique du point A, suivant le lemme II. Or, si l'on mène l'arc $\alpha\gamma$, et si l'on remarque que, les triangles

Fig. 59.



rectangles αpg, $\alpha p\gamma$ étant égaux, les distances αg, $\alpha\gamma$ sont égales : on verra, le point g et la génératrice OG restant fixes, que *tous les points* γ, pôles des tangentes aux lignes asymptotiques de la surface menées par les divers points de cette génératrice, *appartiennent à un petit cercle ayant pour pôle le point* α, et tangent, d'après le lemme I, à la ligne gg' en g. Les arcs normaux à la ligne gg' vont donc concourir au point fixe α, et *la ligne* gg' *est un petit cercle dont le pôle est en ce point.*

Cela posé, le triangle αag est donné, parce que trois de ses éléments sont donnés; son côté $ag = i$ demeure donc constant, ainsi que son angle en g, qui est le supplément de l'angle déjà désigné par φ : *donc, chaque ligne de première courbure* AA'

est une trajectoire des génératrices rectilignes de la surface, et *l'inclinaison* φ *du plan tangent en un point de cette ligne, sur le plan tangent au point correspondant de la ligne de striction, demeure constante.*

Il résulte d'abord, de cette dernière remarque, que *la ligne de striction est aussi une ligne de première courbure de la surface*. Car si l'on prend un point quelconque de la ligne de striction, et si l'on mène la ligne de première courbure qui passe par ce point, l'angle φ sera nul en ce point; mais l'équation des lignes de première courbure est, d'après ce qu'on vient de voir,

$$(a) \qquad d\varphi = 0;$$

donc l'angle φ demeure nul pour tous les points de cette ligne de première courbure, qui coïncide par suite avec la ligne de striction; *et celle-ci*, dès lors, *est une trajectoire des génératrices de la surface*. L'équation générale des lignes de courbure (*voir* page 155)

$$(\text{A}) \qquad (d\text{R} \pm \varpi')(\omega' \pm d\varphi) = \varpi\omega,$$

devient ensuite, par l'emploi de la formule (a),

$$(\text{A}') \qquad \omega' . d\text{R} = \varpi\omega \mp \varpi'\omega';$$

d'où, pour deux lignes quelconques de première courbure,

$$d\text{R} - d\text{R}' = 0, \qquad \text{R} - \text{R}' = \text{constante}:$$

Et deux lignes quelconques de première courbure interceptent des segments égaux sur toutes les génératrices. Donc, en résumé, *toutes les lignes de première courbure sont équidistantes de la ligne de striction*, suivant les termes du n° 2, page 156; et *la ligne de striction est une trajectoire des génératrices rectilignes*. La surface cherchée est donc un hyperboloïde de révolution (*voir* page 158, n° 3).

Remarque. Nous avons admis que *dans deux surfaces gauches*, osculatrices suivant une génératrice déterminée oA, *les lignes asymptotiques des deux surfaces, considérées en un*

même point quelconque de la génératrice commune, sont mutuellement tangentes en ce point; et la même relation a lieu, comme on sait, entre les lignes de courbure des deux surfaces. Cette proposition, que l'on démontre ordinairement en géométrie descriptive par des considérations probablement rigoureuses, mais assurément très-délicates, se peut établir, avec plus de clarté peut-être, de la manière suivante.

Les équations générales (10) et (11) des lignes de courbure, et des lignes asymptotiques d'une surface gauche, peuvent s'écrire (*voir* pages 156 et 166) :

$$(10) \qquad A\left(\frac{dR}{\varpi}\right)^2 + B\left(\frac{dR}{\varpi}\right) + C = 0,$$

$$(11) \qquad A'\left(\frac{dR}{\varpi}\right) + B' = 0,$$

les coefficients A, B, C, A', B' étant de simples fonctions des quantités R et k et des rapports différentiels $\frac{dk}{\varpi}$, $\frac{\varpi'}{\varpi}$, $\frac{\omega'}{\varpi}$. Si donc l'on considère, simultanément, une surface gauche quelconque S; l'hyperboloïde variable h déterminé par la génératrice *fixe* oA de la surface S, et par deux autres génératrices *variables* de la même surface, o'A', o''A'', qui se rapprochent indéfiniment de la première; enfin l'hyperboloïde H, limite du précédent, on reconnaîtra aisément : 1° que le *point central* o, relatif à la génératrice oA, est le même pour les deux surfaces S et H; le coefficient k ayant la même valeur pour l'une et pour l'autre : ce qui entraîne déjà la coïncidence des plans tangents des deux surfaces aux mêmes points de la génératrice commune; 2° que les rapports différentiels $\frac{\omega'}{\varpi}$, $\frac{\varpi'}{\varpi}$, $\frac{dk}{\varpi}$, ont les mêmes valeurs pour les surfaces S et H, parce que les infiniment petits ω, ϖ, ω', ϖ', dk, sont *communs* aux deux surfaces S et h : d'où cette conséquence que, les coefficients A, B, C, A', B', des équations (10) et (11); le rapport $\frac{dR}{\varpi}$, relatif aux lignes asymptotiques ou aux lignes de courbure; et

cet autre rapport enfin $\frac{dR \pm \varpi'}{\varpi : \cos\varphi} = \cot i$ (*voir* page 145, formule (3)], ont les mêmes valeurs, pour les deux surfaces osculatrices, aux mêmes points de la génératrice commune : ce qui démontre que les lignes de courbure, et les lignes asymptotiques des deux surfaces, sont mutuellement tangentes en ces points.

NOTE II.

DE QUELQUES THÉORÈMES CONNUS SUR LES SURFACES A LIGNES DE COURBURE PLANES OU SPHÉRIQUES.

La méthode suivie dans cette Note repose sur la considération des développables circonscrites à une surface suivant ses lignes de courbure. Elle a été employée déjà par M. Picart, professeur au lycée Charlemagne, dans un Mémoire encore inédit présenté à l'Académie des Sciences le 15 février 1858; et, antérieurement, par M. Joachimstal : Journal de Crelle, 1857 (*). Je l'avais toutefois rencontrée moi-même avant les dates citées, et j'avais eu l'occasion de soumettre à M. J. Bertrand un premier travail contenant les démonstrations des nos 2, 4, 6 ci-après, en même temps qu'un Mémoire sur les lignes à double courbure, qui fut présenté à l'Académie le 19 mai 1856, et dont le développement ultérieur a donné lieu au présent ouvrage. Ces détails, d'ailleurs, ne peuvent avoir pour objet la revendication d'une priorité qui ne peut plus m'appartenir. Ils expliquent seulement l'addition de

(*) J'ignore avec quels développements. Car le volume cité manque précisément à la collection de M. Mallet-Bachelier, qui avait bien voulu la mettre à ma disposition pour cette recherche. Je ne dis rien des bibliothèques publiques, où j'aurais pu me renseigner : les exigences du travail quotidien en éloignent les professeurs; et les sauf-conduits, nécessaires pour y pénétrer, les tiennent dehors.

cette Note, qui peut intéresser quelques lecteurs, au moins jusqu'à la publication du Mémoire de M. Picart sur ce sujet : Mémoire que je ne connais encore que par l'analyse qui en a paru dans les *Comptes rendus*, mais qui a valu à son auteur, me dit-on, toute l'approbation d'un juge éminent.

1. *Propositions préliminaires.*

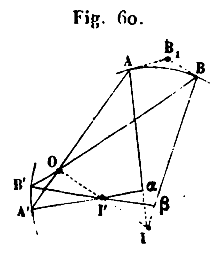
Lemme I. *Dans deux surfaces à rayons vecteurs réciproques, les lignes de courbure des deux surfaces sont des lignes* correspondantes (W. Thompson).

Démonstration. a). Les normales, menées en des points correspondants de deux lignes planes réciproques, forment avec le rayon vecteur commun qui réunit ces points un triangle isocèle ; et les centres de courbure de ces deux lignes, aux mêmes points, sont situés sur une droite passant par l'origine des rayons vecteurs. Il suffit, pour le vérifier, de remplacer les deux lignes par leurs cercles osculateurs aux points considérés.

b). Les normales, menées en des points correspondants de deux surfaces réciproques, forment avec le rayon vecteur qui réunit ces points un triangle isocèle.

Cela posé, soient AB l'élément d'une ligne de courbure de la première surface S, et A′B′ l'élément correspondant de la seconde surface S′ ; considérons les deux triangles isocèles AA′α, BB′β formés par les normales en A, A′, en B, B′ avec les rayons vecteurs AA′, BB′ : puisque AB est une ligne de courbure de la surface S, les normales de celle-ci aux points A et B peuvent être considérées comme se rencontrant en un certain point I ; menons la droite OI, intersection des plans des triangles AA′α, BB′β, et *faisons tourner le second autour de la droite* OI, *pour le rabattre en* $B_1B'_1\beta_1$ sur le plan du premier (*le triangle rabattu* $B_1B'_1\beta_1$ *n'est pas représenté sur la figure*). Nous pourrons concevoir une première ligne plane AB_1 ayant

Fig. 60.



pour normales en A, B_1 les droites $A\alpha$, $B_1\beta_1$, et la ligne réciproque de celle-ci par rapport à l'origine o. Cette ligne réciproque passe par les points A', B'_1, et admet pour normales en ces points, d'après la remarque a), les droites $A'\alpha$, $B'_1\beta_1$ qui se coupent en I'. D'ailleurs les points I, I', intersections de deux normales consécutives des lignes réciproques AB_1, $A'B'_1$, peuvent être pris pour les centres de courbure de ces lignes aux points A, A'; les points I, I' sont donc situés, d'après la même remarque, sur une droite OI passant par l'origine O. On peut dire, par conséquent, que la droite $A'\alpha$ et la *droite rabattue* $B'_1\beta_1$ coupent l'*axe de rotation* OI au même point I'; mais le point I', suivant lequel la droite rabattue $B'_1\beta_1$ rencontre l'axe, est le même que le point d'intersection de la droite primitive $B'\beta$ et de l'axe OI; donc *les normales en* A' *et* B' *de la surface* S', $A'\alpha$ et $B'\beta$, rencontrant la droite OI au même point, *se rencontrent elles-mêmes* en ce point; et la courbe $A'B'$ est une ligne de courbure de la surface S', comme la courbe correspondante AB pour la surface S. On voit, en outre, que *les centres de courbure* I, I' *des sections principales correspondantes des deux surfaces sont situés sur une droite passant par l'origine des rayons vecteurs*, ce qui donne lieu à diverses conséquences que nous avons énoncées ailleurs

Observation. Nous avons admis que les droites $A\alpha$ et $B_1\beta_1$ peuvent être prises pour les normales en A et B_1 d'une certaine ligne AB_1. Cette supposition, en effet, exige seulement, puisque les droites $A\alpha$ et $B_1\beta_1$ sont d'ailleurs infiniment voisines, que la projection de l'arc AB_1 sur la droite $A\alpha$ soit un infiniment petit du second ordre, ou que la somme algébrique des projections des arcs AB et BB_1 sur cette direction soit du même ordre. Or l'arc AB étant normal à la droite AI, sa projection sur cette droite est du second ordre; et il en est de même de la projection *arc* $BB_1 . \cos(BB_1, AI)$ de l'arc BB_1. Cet arc, en effet, et le facteur $\cos(BB_1, AI)$ sont deux infiniment petits du premier ordre : puisque la tangente à l'arc de cercle BB_1, décrit par le point B dans sa rotation autour de l'axe OI, est perpendiculaire au plan BOI, et fait avec le plan AOI, aussi bien

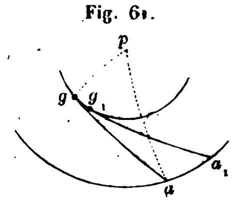
qu'avec toute droite AI située dans ce plan, un angle infiniment peu différent d'un droit.

LEMME II. *Une surface S admettant une ligne de courbure plane* AA_1, *le plan de cette ligne coupe la surface sous un angle constant;* et, réciproquement... (Joachimstal).

Démonstration. Soient en effet aa_1 le grand cercle, de pôle p, qui sert d'indicatrice à la ligne de courbure plane AA_1; ag, $a_1 g_1$ les arcs de grand cercle parallèles aux plans tangents de la surface en A, A_1; et gg_1 la courbe enveloppe de ces arcs : menons les arcs ap, pg. D'après la théorie des tangentes conjuguées, l'arc ag est égal à un quadrant : la tangente rectiligne de l'arc ga, ou de la ligne gg_1 en g, est donc parallèle au rayon de la sphère qui aboutit au point a; la ligne gg_1 est un petit cercle de même pôle p que le grand cercle aa_1, et l'arc pg est constant. Il résulte de là que les trois côtés du triangle sphérique pag sont *donnés;* et que l'angle pag de ce triangle est constant, ainsi que l'inclinaison *complémentaire* de l'arc ag sur la ligne aa_1.

Réciproquement, si le plan de la ligne AA_1 coupe la surface S sous un angle constant, l'arc ag coupe le grand cercle aa_1 sous un angle constant, et le point g où cet arc touche son enveloppe s'obtient en abaissant l'arc pg perpendiculaire sur ag (*voir* page 50). Mais l'arc ap étant égal à un quadrant, et l'angle agp étant droit, l'arc ag est aussi égal à un quadrant; et la courbe AA_1 est une ligne de courbure de la surface.

Fig. 61.



LEMME III. *Toute surface développable S dont une des lignes de courbure est plane, est un héliçoïde.*

Démonstration. Soient gg_1 et aa_1 les indicatrices sphériques de l'arête de rebroussement de la surface et de la ligne de courbure plane AA_1 : celle-ci étant une trajectoire orthogonale des génératrices rectilignes de la surface, les arcs ag, $a_1 g_1$ sont égaux à des quadrants. Ils sont, d'ailleurs, tangents à la ligne gg_1. Les tangentes rectilignes de cette ligne en $g, g_1, \ldots$, sont

donc parallèles aux rayons de la sphère qui aboutissent aux points a, a_1,..., du grand cercle aa_1; la ligne gg_1 est une ligne *plane*, *circulaire*; et l'arête de rebroussement de la surface considérée est une *hélice*.

Lemme IV. *Toute surface développable dont une des lignes de courbure est un cercle, se réduit à un cône de révolution.*

Démonstration. En effet, la ligne de courbure donnée étant *plane*, les génératrices de la surface sont, d'après le lemme précédent, parallèles aux génératrices d'un cône de révolution. En outre, le plan de cette ligne coupant la surface sous un angle constant, et sa courbure *absolue* étant constante, puisque cette ligne est un cercle, sa courbure *géodésique* est aussi constante : et la ligne considérée se transforme, par le développement de la surface sur un plan, en un *cercle* coupé à angle droit par les tangentes de l'arête de rebroussement *transformée*. L'arête de rebroussement primitive se réduit donc à un point, comme sa transformée; et la surface se réduit à un cône de révolution.

2. *Des surfaces dont les lignes de première courbure sont planes et situées dans des plans parallèles.*

Imaginons la surface développable (D), circonscrite à la proposée (S), suivant une ligne de *seconde* courbure. Les génératrices rectilignes de la surface (D) coïncidant, comme on sait, avec les tangentes aux lignes de première courbure, seront, dans le cas actuel, *ou* parallèles à une même droite, *ou* parallèles à un même plan : le plan de l'une des lignes de première courbure. Or, dans cette dernière hypothèse, l'arête de rebroussement de la surface (D) serait plane, la surface (D) elle-même serait un plan; et ce plan contiendrait toutes les lignes de première courbure de la surface (S) qui se réduirait à un plan. Cette hypothèse donc doit être écartée; les génératrices de la surface (D) sont parallèles à une même droite, et cette surface est un *cylindre dont la ligne de seconde courbure est une section droite*. On voit donc déjà que *les lignes de seconde courbure sont situées dans des plans perpendiculaires à ceux des*

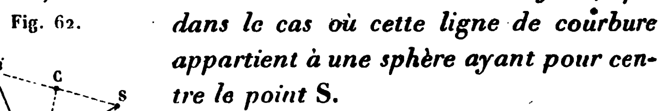
lignes de première courbure ; les traces du plan d'une ligne de seconde courbure sur les plans de toutes les lignes de première courbure étant normales à ces lignes. Il résulte, de cette dernière remarque, que si l'on considère le *cylindre* (C) enveloppé par les plans des lignes de seconde courbure, les sections droites déterminées dans ce cylindre par les plans des lignes de première courbure sont les *développées* de ces dernières lignes. D'où, cette seconde conséquence, que *les lignes de première courbure, projetées en vraie grandeur sur le plan de l'une d'elles, donnent naissance à des courbes ayant même développée.* Enfin, si le plan (P) d'une ligne de seconde courbure roule, en emportant cette ligne, sur le cylindre (C) auquel il est tangent, sa trace, sur le plan de l'une quelconque des lignes de première courbure, roulera sur la développée de cette ligne ; le point correspondant de la ligne mobile décrira cette ligne de première courbure ; et la ligne mobile, dans ses positions successives, viendra coïncider avec toutes les lignes de seconde courbure. On déduit de là, *l'égalité par superposition des lignes de seconde courbure*, et la génération, découverte par Monge, des surfaces considérées.

Remarque. Si la ligne mobile est *droite*, la surface (S) se réduit à un *héliçoïde développable.*

3. *Des surfaces dont les lignes de première courbure sont sphériques et distribuées sur des sphères concentriques,*

Lemme. *Une ligne de courbure* AB *d'une surface développable* (D) *ne peut coïncider avec la* podaire, *relative à une origine* S, *de l'arête de rebroussement* ab *de la surface, que dans le cas où cette ligne de courbure appartient à une sphère ayant pour centre le point* S.

Fig. 62.



En effet, les génératrices rectilignes infiniment voisines Aa et Bb de la surface (D) pouvant être considérées comme se rencontrant en un point i, les angles SAi, SBi sont droits, l'élément AB de la ligne de courbure donnée peut être regardé

comme appartenant à la sphère décrite sur S*i* comme diamètre, et cet élément, par suite, est normal au rayon de la sphère, ou à la droite AC qui réunit le point A au milieu du diamètre S*i*. Mais l'élément AB est déjà normal à la droite A*a*, ou A*i*. Il est donc *normal* au plan SA*i*, ainsi qu'*à la droite* AS : et la ligne de courbure AB appartient à une sphère ayant pour centre le point S.

Cela posé, imaginons la surface développable (D) circonscrite à la proposée (S) suivant une ligne de seconde courbure AB. Les génératrices rectilignes de la surface (D) coïncident avec les tangentes des lignes de première courbure, et ces tangentes sont perpendiculaires aux rayons SA, SB,..., qui joignent leurs points de contact sur les lignes de première courbure au centre commun S des sphères contenant ces lignes. Le lemme précédent est donc applicable; et la surface (D) ne peut être une développable proprement dite, à moins que la ligne de seconde courbure AB de la surface (S) n'appartienne à une sphère ayant pour centre le point S; auquel cas la surface (S) elle-même se réduirait à cette sphère. Écartant donc ce cas particulier, nous voyons que la *développable* (D) *se réduit à un cylindre, dont la ligne de seconde courbure* AB *est une section droite :* le plan de cette section étant, dès lors, normal à toutes les lignes de première courbure et passant par le centre commun S des sphères qui les contiennent. Ainsi déjà, *les lignes de seconde courbure sont planes; leurs plans concourent en* S; *et les traces de l'un de ces plans, sur les sphères contenant les lignes de première courbure, représentent les arcs de grand cercle normaux à ces lignes, ou tangents à leurs développées sphériques.* Il résulte de cette dernière remarque que si l'on considère le *cône* (C), de sommet S, enveloppé par les plans des lignes de seconde courbure, les traces de ce cône, sur les sphères relatives aux lignes de première courbure, seront les développées sphériques de ces lignes. D'où cette autre conséquence que *les lignes de première courbure projetées,* centralement, *sur la sphère qui contient l'une d'elles, donnent naissance à des courbes ayant même dévelop-*

pée sphérique. Enfin, si le plan (P) d'une ligne de seconde courbure tourne autour du point *fixe* S, en emportant cette ligne et en roulant sur le cône (C) auquel il est tangent : sa trace, sur la sphère contenant l'une quelconque des lignes de première courbure, roulera sur la développée sphérique de cette ligne qui sera décrite tout entière par le point correspondant de la ligne mobile; et celle-ci, dans ses positions successives, viendra coïncider avec toutes les lignes de seconde courbure. On déduit de là, *l'égalité par superposition des lignes de seconde courbure*, et la génération de ces nouvelles surfaces.

Si le cône directeur (C) est *de révolution*, les lignes sphériques de première courbure sont des *hélices*, appartenant à des cylindres parallèles.

Remarque I. M. Picart a étudié, le premier, ces nouvelles surfaces, et énoncé ce théorème : *Si toutes les lignes de courbure d'un système sont situées sur des sphères concentriques, les lignes de courbure de l'autre système sont dans des plans passant par le centre commun des sphères et coupant la surface orthogonalement*. (*Comptes rendus*, 1858, tome XLVI, page 357.)

Remarque II. On peut modifier le commencement de la solution précédente, de manière à éviter l'emploi du lemme auquel nous avons eu recours.

Considérons, en effet, la surface développable (D'), qui est engendrée par les normales menées à la surface (S), tout le long d'une ligne de seconde courbure AB. Le plan tangent de la surface (D') en A, ou le plan osculateur de son arête de rebroussement, est évidemment *normal* à la ligne de première courbure AA_1, et par suite ce plan passe constamment par le centre S de la sphère qui contient cette ligne. Tous les plans osculateurs de l'arête de rebroussement relative à la surface (D') passent donc par un point fixe S : et cette surface se réduit *soit* à un plan unique, *soit* à un cône ayant pour sommet le point S. Dans cette dernière hypothèse, la ligne AB appartiendrait à une sphère concentrique au cône, et la surface (S) elle-même se réduirait à une sphère. Laissant donc de côté ce cas

particulier, on voit : que la surface (D′) se réduit à un plan, le plan de la ligne de seconde courbure AB qui est, en même temps, une ligne géodésique de la surface ; et que tous les plans des lignes de seconde courbure passent par le point S.

4. *Des surfaces dans lesquelles les lignes de première courbure sont planes et situées dans des plans qui passent par une même droite.*

Considérons encore la surface développable (D) circonscrite à la proposée suivant une ligne de seconde courbure. Les génératrices de (D), qui sont tangentes aux lignes de première courbure, rencontrent toutes la droite O*z*, commune intersection des plans de ces lignes, *soit* en un même point, *soit* en des points différents de cette droite. Mais on reconnaît aisément que cette dernière hypothèse doit être rejetée ; la surface (D) se réduit à un cône dont le sommet S est situé sur la droite O*z*, et l'on en conclut que *les lignes de seconde courbure de la surface sont des lignes sphériques ; les centres* S *des sphères qui les contiennent étant distribués sur la droite* Oz, *intersection des plans des lignes de première courbure.*

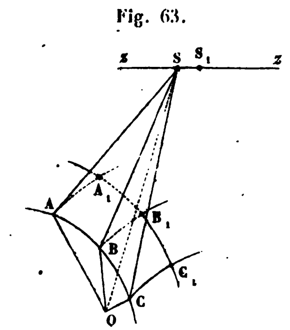
5. *Des surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes, et dont les lignes de première courbure sont, en outre, circulaires.*

La développable (D), circonscrite à la surface proposée suivant une ligne de première courbure ABC, est un héliçoïde, puisque cette ligne est plane ; un cône de révolution (*voir* le lemme IV), puisque cette ligne est un cercle : et le sommet S de ce cône est un point commun aux plans des lignes de seconde courbure. Ces plans ont donc une infinité de points communs S, $S_1, \ldots$, nécessairement situés en ligne droite. *Les plans des lignes de seconde courbure passent donc par une même droite zz, qui contient les sommets* S *des cônes de révolution circonscrits à la proposée suivant les lignes de première courbure.*

D'un autre côté, les développables, normales à la surface suivant les mêmes lignes ABC, sont aussi des cônes de révo-

lution; les sommets O de ces cônes sont les centres de sphères inscrites à la surface suivant les mêmes lignes; *et les droites* SO *sont normales aux plans des lignes* ABC *de première courbure*. Mais, d'après le théorème général de M. O. Bonnet (*voir* page 177), *les plans des lignes de première courbure* ABC *sont ici parallèles à une même droite* $z'z'$; *et cette droite* $z'z'$ *est perpendiculaire à la droite* zz. La droite $z'z'$ est donc perpendiculaire à la droite zz et aux droites SO, et par suite *les droites* SO *sont dans un plan fixe qui contient les centres* O *des sphères inscrites à la surface suivant les lignes de courbure circulaires*. Ceci posé, les rayons OA des sphères inscrites, relatifs aux différents points de la ligne de seconde courbure AA_1, sont également inclinés, d'après le théorème de M. Joachimstal, sur le plan AA_1zz de cette ligne. *Les rayons* OA *de ces sphères sont donc proportionnels* aux distances de leurs centres au plan AA_1zz de l'une quelconque des lignes de seconde courbure, ou proportionnels encore *aux distances des centres à la droite* zz, puisque le plan *fixe* des centres et le plan *fixe* de l'une des lignes de seconde courbure se coupent suivant la droite zz. *La surface considérée est donc l'enveloppe d'une sphère variable dont le centre parcourt une ligne plane quelconque* OO_1, *et dont le rayon est proportionnel à la distance du centre à une droite fixe* zz *située dans le plan de la ligne des centres.*

Fig. 63.



6. *Des surfaces dont toutes les lignes de courbure sont circulaires.*

L'emploi des considérations contenues dans le numéro précédent nous montre d'abord que les plans des lignes de chaque courbure, dans la surface considérée, se coupent suivant une même droite : ce qui nous donne deux droites directrices, zz et $z'z'$.

Cela posé, *si les cercles de l'une des courbures*, de la pre-

mière par exemple, *ont deux points* réels *communs* ω, ω', suivant la ligne zz, la surface S', *réciproque* de la surface considérée, par rapport à l'*origine* ω et suivant une *puissance* mesurée par le carré de la droite $\omega\omega'$, sera un cône ayant pour sommet le point ω'; et ce cône, qui a des cercles pour lignes de seconde courbure, est de révolution. *La surface*, considérée dans ce cas, est donc *la surface réciproque d'un cône de révolution.*

Si, en second lieu, les cercles de première courbure étaient supposés avoir un *seul* point réel commun ω, on reconnaîtrait aisément que la surface réciproque S' serait une surface *gauche* dont les lignes de première courbure seraient, précisément, les génératrices rectilignes de la surface; résultat absurde, qui exclut cette seconde hypothèse.

Supposons enfin *que les cercles de première courbure n'aient aucun point réel commun*, et considérons (*voir* la *fig.* 63) la surface développable OABC formée par les normales menées à la proposée par les différents points d'*une* ligne de première courbure ABC. Cette développable étant un cône de révolution ayant son sommet en O, on a les égalités

$$OA = OB = OC \ldots.$$

Si donc, recourant à une méthode employée d'abord par M. O. Bonnet, on *contracte* la surface S, suivant toutes ses normales, d'une quantité égale à OA, la surface S', résultant de cette contraction, aura encore des cercles pour ses lignes de courbure; mais *tous ses* cercles de seconde courbure $A'A'_1$, $B'B'_1$, $C'C'_1, \ldots$, auront un premier point réel commun en O. Ces cercles auront donc, d'après ce qui précède, un second point réel commun; et la surface S' est la réciproque d'un cône de révolution. Nous avons donc ce résultat : *Les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont circulaires se séparent en deux classes : la première contient les surfaces réciproques d'un cône de révolution; et les surfaces de la seconde dérivent de celles de la première par une dilatation constante effectuée suivant leurs normales.*

Ces surfaces ont été étudiées déjà par MM. Ch. Dupin et Liouville (*Correspondance de l'École Polytechnique*, tome Ier, page 22; *Journal de Mathématiques*, 1847, page 282.)

7. *Des surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes.*

Dans ces surfaces, *les plans des lignes de chaque courbure enveloppent un cylindre; et les deux cylindres résultants ont leurs génératrices perpendiculaires entre elles.*

La démonstration de cette proposition, qu'on lit à la p. 177, avait été communiquée à la Société Philomathique dans la séance du 7 novembre 1857 (*Bulletin*, 1857, page 134).

Remarque. La plupart des résultats précédents sont dus à MM. O. Bonnet, J.-A. Serret et Joachimstal.

NOTE III.

SUR LA MÉTHODE DE M. BRESSE.

Une figure plane donnée se mouvant d'une manière continue dans son plan, on peut se proposer de construire, à une époque quelconque du mouvement, le centre de courbure de la ligne décrite par l'un des points, ou enveloppée par l'une des droites de la figure mobile. Les principes de la théorie des centres instantanés de rotation, fournissant à chaque instant la normale de la ligne considérée, suffiraient, à la rigueur, pour conduire à la construction dans chaque cas particulier; mais sous la condition de résoudre chaque fois un problème nouveau. Certaines formules, bien connues, présentent dans beaucoup de cas un inconvénient semblable, aggravé encore par la nécessité d'une minutieuse discussion des signes. Aussi peut-on regarder le Mémoire publié il y a quelques années, par M. Bresse, dans le *Journal de l'École Polytechnique*, comme renfermant la première solution vraiment générale de la ques-

tion. La méthode de l'auteur, d'ailleurs fort élégante, reposant sur des considérations assez délicates de cinématique, il ne sera peut-être pas inutile de la réduire à des termes purement géométriques : et c'est à quoi l'on peut parvenir aisément.

1. La question, décomposée en ses éléments et présentée sous forme synthétique, se réduit à ces trois points principaux :

Établir l'existence de la circonférence, lieu géométrique des points sans accélération centripète, et que nous nommerons *circonférence des inflexions;*

Définir l'usage de cette circonférence dans la construction du centre de courbure de la ligne décrite, ou enveloppée, par un point, ou par une droite de la figure mobile;

Et réunir enfin, dans chaque cas particulier, les trois *éléments nécessaires pour la détermination complète de cette circonférence.*

2. Théorème. *Considérant, dans la position qu'elle occupe actuellement une figure donnée, qui se meut dans son plan suivant une loi quelconque :*

1°. *Les centres de courbure des lignes enveloppées par les diverses droites de la figure mobile, aux points où ces droites les touchent actuellement, se trouvent distribués sur une même circonférence, que nous nommerons* circonférence des centres, *passant par le centre instantané actuel de rotation, tangente à la courbe décrite par ce point, et d'un rayon mesuré par le rapport différentiel* $\frac{ds}{2d\omega}$ *qui sera défini plus loin;*

2°. *Les points de la figure mobile dont les trajectoires ont actuellement un rayon de courbure infini, appartiennent à une seconde circonférence symétrique de la première, par rapport au centre instantané actuel de rotation, et que nous appellerons* circonférence des inflexions.

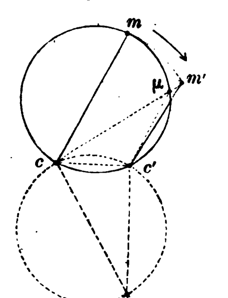
Démonstration. 1). Considérons d'abord deux positions infiniment voisines d'une même droite de la figure mobile, et abaissons des centres instantanés de rotation correspondants,

c et c', des perpendiculaires sur ces droites. Ces perpendiculaires se rencontreront en un point γ, infiniment voisin du centre de courbure de la ligne enveloppée par la droite mobile, et formeront en ce point un angle égal à l'angle même de ces droites, ou à l'angle $d\omega$ dont la figure mobile tout entière a tourné autour du centre c, pour passer de la première position à la seconde. Tous les points analogues au point γ, et relatifs aux diverses droites de la figure mobile, sont donc distribués sur un segment capable de l'angle $d\omega$, construit sur la base cc' et dont le rayon est égal à $\frac{cc'}{2\,d\omega}$.

2). Construisant, en second lieu, sur la même base cc' un second segment cmc' capable du même angle $d\omega$ et symétrique du premier par rapport à cc' : considérons l'un des points m de la figure mobile, situé sur ce segment; et menons la droite cm.

La figure mobile venant à tourner, autour du point c, de l'angle $d\omega$ (mesuré par la moitié de l'arc cc' du cercle cmc'), le point m vient en m', en décrivant un arc mm' du premier ordre; et les droites cm, cm' interceptent sur le cercle cmc' un arc $m\mu$, dont la moitié sert aussi de mesure à l'angle $d\omega$ et qui est par suite égal à l'arc cc'. Il résulte de cette égalité que la corde $c'\mu$ est parallèle à cm; et, par suite, en menant $c'm'$, que l'angle $\mu c'm'$ est égal à l'angle des normales en m et m' de la trajectoire du point m. Or, on a dans le triangle $c'\mu m$,

Fig. 64.



$$\frac{\sin c'}{\sin \mu} = \frac{\mu m'}{c'm'};$$

ou, simplement,

$$\frac{c'}{d\omega} = \frac{\mu m'}{c'm'}.$$

Et l'on voit, $\mu m'$ étant une quantité infiniment petite, et $c'm'$ étant finie, que c', ou son égal l'angle de mc et de $m'c'$, est un infiniment petit du second ordre.

Réciproquement, si le point m est tel, que l'angle des deux

normales infiniment voisines de sa trajectoire, mc et $m'c'$, soit un infiniment petit du second ordre, on verra en menant $c'\mu$, parallèle à cm et rencontrant cm' en μ, que le rapport $\frac{\mu m'}{c'm'}$ et la droite $\mu m'$ sont deux infiniment petits, et comme le point μ appartient au segment capable de l'angle $d\omega$ construit sur cc', on en conclura que les points m et m' sont infiniment voisins de quelque point de ce segment.

Les points de la figure mobile situés sur le segment cmc présentent donc, à l'exclusion de tous les autres points de cette figure, cette particularité que l'angle de la normale actuelle à la trajectoire de l'un de ces points et de la normale infiniment voisine est un infiniment petit du *second* ordre, tandis que l'arc élémentaire correspondant de la trajectoire demeure du *premier*.

Dès lors, si l'on conçoit que le point c' se rapproche indéfiniment du point c, et si l'on passe à la limite; on verra, en désignant par ds l'arc élémentaire de la ligne des centres instantanés de rotation :

1°. Que le cercle variable $c\gamma c'$, de rayon $\frac{cc'}{2\,d\omega}$, passant constamment par les points c et c', et contenant les points de rencontre des normales infiniment voisines des lignes enveloppées par les diverses droites de la figure mobile, a pour limite une circonférence déterminée, de rayon fini et mesuré par $\frac{ds}{2\,d\omega}$, tangente au point c à la ligne des centres instantanés de rotation et contenant les centres de courbure des lignes enveloppées par les diverses droites de la figure mobile aux points où ces droites les touchent actuellement : c'est la *circonférence des centres* de l'énoncé;

2°. Que le cercle variable cmc', toujours égal au précédent $c\gamma c'$, et symétrique de celui-ci par rapport à la droite cc', a pour limite une seconde circonférence, symétrique de la circonférence des centres par rapport au centre instantané de rotation c, contenant tous les points de la figure mobile dont

les trajectoires ont actuellement un rayon de courbure infini, et à laquelle nous avons donné le nom de *circonférence des inflexions*.

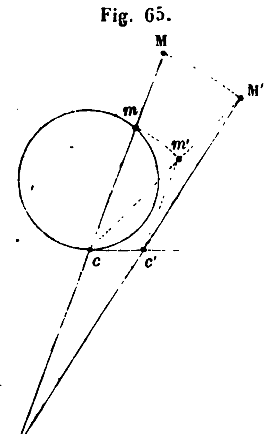
Corollaires. 1'). Si une droite de la figure mobile tourne autour d'un point fixe, ce point et son symétrique par rapport au centre c appartiendront, respectivement, à la circonférence des centres et à la circonférence des inflexions.

2'). Si un point de la figure mobile décrit une droite, ce point et son symétrique par rapport au centre c appartiendront, respectivement, à la circonférence des inflexions et à la circonférence des centres.

3. Problème. *Connaissant le centre instantané actuel de rotation* c *et le rayon de courbure correspondant* MO *de la trajectoire d'un point* M *de la figure mobile, construire la corde* cm *que ce rayon détermine dans la circonférence des inflexions; ou* réciproquement, *connaissant une corde* cm *de la circonférence des inflexions, construire le rayon de courbure* MO *de la trajectoire d'un point* M *de la figure mobile situé d'une manière quelconque sur cette corde.*

Solution. Soient c, c' deux positions infiniment voisines du centre instantané de rotation, et MM', mm' les arcs semblables, infiniment petits, décrits par les points M, m autour du centre c; si l'on mène les droites M$'c'$, $m'c'$, la première ira couper Mc en un point infiniment voisin du centre de courbure O de la trajectoire du point M, et la seconde pourra être considérée, d'après la propriété caractéristique des points m de la circonférence des inflexions, comme parallèle à mc ou cO. Le triangle M$'c$O et la parallèle $m'c'$ à la base de ce triangle donnent

Fig. 65.



alors

$$\frac{M'O}{M'c} = \frac{M'c'}{M'm'},$$

d'où, en passant à la limite,

$$\frac{MO}{Mc} = \frac{Mc}{Mm},$$

(1) $$Mm.MO = \overline{Mc}^2:$$

et cette relation permettra de construire celui des deux points, m ou O, qui sera inconnu. Il n'y aura jamais d'ailleurs aucune incertitude dans la construction, car *les deux segments* $\overrightarrow{Mm}$, $\overrightarrow{MO}$ *sont toujours de même sens;* comme on le voit aisément sur la figure en faisant successivement passer le point M entre les points m et c, ou au delà de c par rapport à m.

Observation. Cette circonstance remarquable, que les segments Mm, MO sont toujours de même sens, dispense des discussions minutieuses que nécessitent les formules ordinaires relatives aux problèmes dont nous nous occupons, et caractérise de la manière la plus heureuse la méthode de M. Bresse.

Corollaire. Si un point M de la figure mobile décrit une circonférence de centre O, la construction de la formule (1), résolue par rapport à Mm, fera connaître un point m de la circonférence des inflexions et le point symétrique de la circonférence des centres.

4. *Applications.* 1°. *A l'ellipse décrite par le sommet libre* M *d'un triangle donné* $m_1 m_2$M; dont les sommets m_1 m_2 glissent sur deux axes donnés ox, oy. Construisant le centre instantané de rotation c, on connaît trois points c, m_1, m_2 de la circonférence des inflexions, qui est dès lors déterminée.

2°. *A la conchoïde décrite par l'extrémité* M *d'une droite* Mm *de longueur donnée, dont le point* m *glisse sur une droite donnée, et qui passe par un point donné* γ. Construisant le centre instantané de rotation c, on connaîtra trois

points de la circonférence des inflexions : le point m, le point c et le point symétrique du point γ par rapport au point c.

3°. *A la cycloïde*. Le centre m du cercle générateur décrivant une droite parallèle à celle qui est décrite par le centre instantané de rotation c, la ligne des inflexions sera la circonférence décrite sur cm comme diamètre.

4°. *A la courbe de Watt*. Elle peut être engendrée par un point d'une droite mobile, dont deux autres points glissent sur deux cercles donnés; on devra donc, pour déterminer complétement la circonférence des inflexions, appliquer deux fois le corollaire du problème résolu dans le n° 3.

Ces problèmes et plusieurs autres se trouvent résolus dans le Mémoire de M. Bresse, ainsi que dans un intéressant travail de M. Mannheim sur le même sujet (*Journal de l'École Polytechnique*, 37[e] cahier).

Observation. La *première partie* du théorème compris dans le n° 2 constitue une propriété importante du mouvement d'une figure plane, qui a été remarquée d'abord par Bobillier (*Géométrie*, page 270).

NOTE IV.

SUR LES LIGNES GÉODÉSIQUES.

---

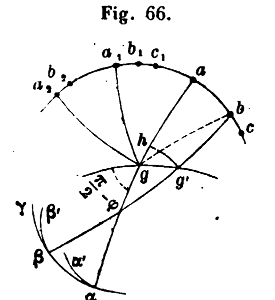
1. Théorème. *Toute surface sur laquelle on peut tracer deux séries de lignes géodésiques telles, que chaque ligne de l'une des séries soit coupée sous un même angle* i *par toutes les lignes de l'autre série, est une surface développable.*

Démonstration. Construisons l'indicatrice sphérique abc d'une ligne géodésique *déterminée* ABC de la première série; et les indicatrices $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$,..., des lignes géodésiques AA′ BB′, CC′,..., de la seconde série, lesquelles rencontrent la ligne ABC aux points A, B, C, sous l'angle *constant* i. Imagi-

nons, en outre, dans la surface considérée, une série de *lignes à tangentes parallèles ;* par exemple, une série de *lignes de niveau :* et soit gg'... la ligne sphérique formée par les extrémités des rayons de la sphère parallèles aux tangentes de ces lignes aux points A, B, C,..., où elles sont rencontrées par la ligne ABC.

Les arcs de grand cercle $ag\alpha$, $bg'\beta$,..., étant parallèles aux plans tangents menés à la surface par les points A, B,..., sont normaux à la ligne *abc*, ainsi qu'aux indicatrices $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$,..., des lignes géodésiques AA', BB',... Ces arcs $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ sont d'ailleurs égaux entre eux, comme mesurant l'inclinaison commune *i* des lignes géodésiques AA', BB', CC' de la seconde série sur la ligne particulière ABC de la première série; ils sont donc normaux à la ligne $\alpha\beta\gamma$ formée par leurs extrémités, comme à celle *abc* formée par leurs origines. Il résulte de là que la ligne $\alpha\beta\gamma$ est déterminée par la donnée de l'angle *i* et de la ligne *abc*; ou, inversement, que *la ligne* abc *est elle-même complétement déterminée par la donnée de l'angle* i *et de la ligne* $\alpha\beta\gamma$. Or cette dernière est effectivement *donnée*, puisqu'elle n'est autre chose que *la commune enveloppe des indicatrices* $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$,..., relatives aux lignes géodésiques de la seconde série; l'angle *i* est aussi donné; et la ligne *abc* est *déterminée : Toutes les lignes géodésiques de la première série ont donc même indicatrice sphérique* abc; il en est de même des lignes de la seconde série; et les indicatrices *abc*, $\alpha\beta\gamma$, relatives aux lignes des deux séries, ont même développée sphérique.

Fig. 66.

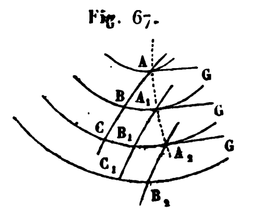


Cette circonstance se présente, en effet, dans une surface développable où les deux séries de lignes géodésiques donnent naissance, par le développement de la surface sur un plan, à deux séries de droites parallèles, de telle manière que les tangentes des lignes de chaque série se trouvent parallèles, après et aussi, par suite, avant le développement : et nous allons faire

voir que ce parallélisme ne peut avoir lieu que dans une telle surface.

Considérant, en effet, sur des courbes de niveau successives, les points $A, A_1, \ldots$, tels, que les tangentes de ces courbes en ces points soient parallèles entre elles; et soit g, le point de la ligne sphérique gg', servant d'indicatrice à ces courbes de niveau, qui est l'extrémité du rayon de la sphère parallèle à ces tangentes. Soient ABC, $A_1B_1C_1, \ldots$, les lignes géodésiques de la première série passant par les points A, $A_1, \ldots$, et abc, $a_1b_1c_1, \ldots$, leurs indicatrices sphériques, *confondues en une même courbe* $a_1b_1c_1 \ldots abc$: Menons les arcs de grand-cercle ga, ga_1, $ga_2, \ldots$ Les plans de ces arcs étant parallèles aux plans tangents de la surface en A, A_1, $A_2, \ldots$, ces arcs sont normaux en $a, a_1, a_2, \ldots$, à la ligne abc. L'arc normal à la ligne abc, pour un nombre infini de ses points, passe donc toujours par le point g; et la ligne abc est un petit cercle de pôle g; un petit cercle de pôle $g' \ldots$: ce qui entraîne la coïncidence des points $g, g', \ldots$, ou la réduction de la ligne gg' à un point unique g; *auquel cas les courbes de niveau sont des droites parallèles, et la surface se réduit à un cylindre.*

Fig. 67.



Cette conclusion suppose toutefois que les points $a, a_1, a_2, \ldots$, sont distincts : supposons donc maintenant que ces points se confondent en un seul a, ou que les tangentes en $A, A_1, A_2, \ldots$ aux lignes géodésiques AB, A_1B_1, $A_2B_2, \ldots$, soient parallèles ; et traçons la ligne de contact $AA_1A_2, \ldots$, du cylindre circonscrit à la surface, et parallèle à la droite AG. Les *plans tangents à la surface,* menés par les différents points de cette ligne, *seront parallèles entre eux, et, par suite, se confondront en un seul :* cette ligne AA_1A_2 se réduira nécessairement à une *ligne droite,* le long de laquelle la surface aura même plan tangent; et toutes les droites analogues seront les génératrices d'une *surface développable à laquelle se réduit la surface proposée.*

Enfin, l'on peut supposer encore que les lignes géodésiques ABC de la première série contiennent les points *homologues*

des lignes de niveau successives, pour lesquels les tangentes de ces lignes sont parallèles. Chacune des lignes ABC est alors la courbe de contact d'un cylindre, circonscrit à la surface, et parallèle au rayon de la sphère qui aboutit à l'un des points g de la ligne gg'. Les arcs ga, gb, gc sont donc normaux à la ligne abc qui est un petit cercle de pôle g; un petit cercle de pôle g'... : d'où cette conclusion, déjà obtenue dans une autre hypothèse, que la ligne gg' se réduit à un point unique g, les lignes de niveau se réduisant à des droites parallèles, *et la surface elle-même se réduisant à un cylindre.*

Remarque. Le problème, dont la solution est contenue dans le théorème précédent, nous a été indiqué par M. Liouville, qui avait prévu, beaucoup mieux que nous ne l'aurions su faire nous-même, que notre méthode s'y prêterait aisément.

2. L'équation générale des lignes géodésiques d'une surface gauche

$$di = \pm \omega \sin \varphi, \tag{1}$$

établie à la page 151, peut s'appliquer à une surface quelconque : il suffit, en effet, de concevoir que i représente dans cette équation l'inclinaison de la ligne géodésique considérée, en l'un quelconque de ses points, sur la *ligne de niveau* qui passe par le même point; φ désignant le complément de l'inclinaison du plan tangent à la surface sur le plan de la ligne de niveau; et ω l'angle infiniment petit formé par les tangentes de deux lignes de niveau consécutives, aux points où ces lignes sont rencontrées par la ligne géodésique considérée. La démonstration est d'ailleurs très-simple, et se déduit de l'emploi du triangle ghg', rectangle en h, dans lequel le côté gh représente la différentielle di.

Si l'on pose $i =$ *constante*, ou $di = 0$, l'équation (1) se réduit à celle-ci :

$$\omega . \sin \varphi = 0. \tag{2}$$

Or, on satisfait à cette dernière équation : *soit* en posant $\sin \varphi = 0$; et, dans ce cas, le plan tangent à la surface, en chaque point de la ligne géodésique considérée, est perpendi-

culaire au plan général des courbes de niveau; la surface développable, circonscrite à la proposée suivant cette ligne, se réduit à un cylindre, et la ligne considérée est une *hélice* tracée sur ce cylindre : *soit*, en posant $\omega = 0$; et la ligne considérée, qui est une trajectoire des courbes de niveau, et qui rencontre ces courbes en des points où leurs tangentes sont parallèles, est encore une *hélice*, tracée sur un cylindre parallèle à la commune direction de ces tangentes. On a donc ce théorème : *Toute ligne géodésique, qui rencontre sous un angle constant une série de courbes de niveau d'une surface, est une hélice.*

NOTE V.

Théorème de Meunier. *En chaque point* o *d'une surface, le rayon de courbure* ρ' *d'une section oblique est la projection, sur le plan de cette section, du rayon de courbure* ρ *de la section normale* correspondante. (*Voir* pages 186 et 227).

Démonstration. Que l'on coupe la surface, en effet, par un plan parallèle au plan tangent en o, et dont la distance à celui-ci soit un infiniment petit du second ordre, $oh = \varepsilon^2$; que ahb, $a'h'b'$ soient les cordes *parallèles*, déterminées dans la courbe résultante par les plans des deux sections, normale et oblique, considérées; et que oh, oh' soient perpendiculaires à ces cordes : on aura

$$\rho = \frac{\overline{ah}^2}{2\,oh}, \quad \rho' = \frac{\overline{a'h'}^2}{2\,oh'}; \quad \rho' = \rho \cdot \frac{oh}{oh'} \cdot \left(\frac{a'h'}{ah}\right)^2.$$

D'ailleurs, le rapport $\frac{a'h'}{ah}$ ayant pour limite l'unité, comme on le reconnaît aisément, la dernière formule peut s'écrire

$$\rho' = \rho \cdot \frac{oh}{oh'} = \rho \cos a,$$

et démontre le théorème énoncé.

FIN.



